

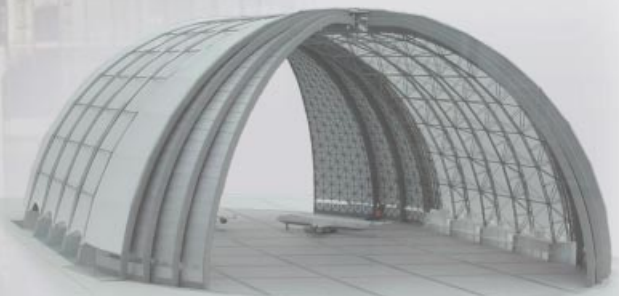
# E Grundfragen der Integralrechnung

Anliegen der Differentialrechnung war es, die **lokale Änderungsrate** einer Größe bzw. den Anstieg eines Funktionsgraphen an einer bestimmten Stelle zu ermitteln, was über den Grenzwert des Differenzenquotienten zum Begriff der Ableitung einer Funktion an dieser Stelle und über einem ganzen Intervall führte. Wir sind also von einer *Gesamtänderung*, von einer *Gesamtkurve* und ihrem Verhalten aus zu der Veränderung in einem bestimmten *Moment*, zu dem Verhalten des Graphen an einer bestimmten Stelle vorgedrungen – gleichsam vom endlich „Großen“ zum unendlich „Kleinen“.

Wie in dem einleitenden Abschnitt zum Teil Analysis dieses Buchs dargestellt, geht die Integralrechnung nun den umgekehrten Weg. Sie ist in diesem Sinne die Umkehrung der Differentialrechnung und macht den Prozess des Differenzierens rückgängig: Die betrachteten Objekte (etwa krummlinig begrenzte Fläche, von gekrümmten Flächen begrenzte Körper, „unregelmäßig“ verlaufende Prozesse usw.) denkt man sich zu diesem Zweck *in beliebig* („unendlich“) *viele beliebig kleine berechnen- oder beschreibbare Teile* zerlegt, deren Summation mit anschließender Grenzwertbildung eine Aussage über bestimmte Eigenschaften dieser Objekte als *Ganzes* gestattet. Man gelangt also gleichsam vom unendlich „Kleinen“ zum endlich „Großen“.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Integralrechnung ist die Berechnung von Flächeninhalten bzw. die Berechnung von Größen, die sich mittels Flächen modellieren lassen. Ein einfaches Beispiel soll dies illustrieren:

Die Stahlbögen der weltweit größten freischwebenden Montagehalle einer im Süden Berlins entstehenden Luftschiffwerft erheben sich über die 8 m hohen Fundamentsockel bis auf 107 m Höhe. Die Halle hat eine Gesamtlänge von 360 m und eine Breite von 210 m. Man berechnet näherungsweise das Volumen der Halle, wenn die sich an den Stirnseiten befindenden gekrümmten Flächen jeweils als Viertelkugel angenommen werden. (s. Beispiel E 23)



## E 1 Das unbestimmte Integral

### E 1.1 Die Begriffe *Stammfunktion* und *unbestimmtes Integral*

Die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts war auf dem Gebiet der Elektrizitätslehre durch viele große Entdeckungen gekennzeichnet, die mit solchen Namen wie Hans Christian OERSTED (1777–1851), André Marie AMPÈRE (1775–1836), Georg Simon OHM (1789–1854), Alessandro VOLTA (1745–1827), Michael FARADAY (1791–1867) oder Wilhelm WEBER (1804–1891) verbunden sind.

OERSTED experimentierte intensiv mit stromdurchflossenen Leitern und Magneten und entdeckte dabei 1820 einen grundlegenden Zusammenhang: Durch einen stromdurchflossenen Leiter wird eine Magnetnadel abgelenkt. Folglich ist ein stromdurchflossener Leiter mit einem Magnetfeld verbunden. FARADAY, einer der bedeutendsten Forscher auf dem Gebiet der Elektrizitätslehre, beschäftigte sich nach Bekanntwerden von OERSTEDS Entdeckung gründlich mit den Zusammenhängen zwischen Elektrizität und Magnetismus. Er ging dabei von folgender Hypothese aus: Wenn ein elektrischer Strom mit einem Magnetfeld verbunden ist, dann müsste es umgekehrt auch möglich sein, mithilfe von Magneten elektrischen Strom zu erzeugen. Und schon 1822 notierte er in sein Tagebuch: „Verwandle Magnetismus in Elektrizität“. Nach vielen vergeblichen Versuchen konnte FARADAY im Jahre 1831 nachweisen, dass in einer Spule eine Spannung entsteht, wenn sich das von ihr umschlossene Magnetfeld ändert. Damit war die elektromagnetische Induktion entdeckt, die Grundlage für die Funktionsweise von Generatoren und Transformatoren.

Das Beispiel zeigt: Das Umkehren von Aufgaben- oder Problemstellungen kann als erkenntnistheoretische Methode zu neuen Forschungsansätzen, Lösungsideen und Einsichten führen. Auch im bisherigen Mathematikunterricht wurde von dieser Methode häufig Gebrauch gemacht – etwa im Zusammenhang mit Überlegungen zur Umkehrung von Rechenoperationen, von Sätzen, Funktionen u. Ä. Eine wichtige Aufgabe im Kapitel *Differentialrechnung* bestand nun bekanntlich darin, zu einer gegebenen Funktion  $f$  die Ableitungsfunktion  $f'$  zu ermitteln. In diesem Kapitel soll die Aufgabenstellung – wie in der Einleitung zu Kapitel E bereits angedeutet – umgekehrt werden, d. h., es soll überlegt werden, ob das Problem „Zu einer gegebenen Funktion  $f$  ist eine Funktion  $F$  zu bestimmen, deren Ableitung gleich  $f$  ist“ gelöst werden kann.

E 1

Beispiel E 1:

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = 2x$ . Es ist eine Funktion  $F$  zu ermitteln, für die  $F' = f$  gilt. Wir suchen in der Vielzahl von Funktionen, die wir in der Differentialrechnung abgeleitet haben, nach einer **Funktion, deren Ableitung  $2x$  ist**. Die Funktion  $F$  mit  $F(x) = x^2$  hat diese Eigenschaft, denn  $F'(x) = 2x = f(x)$ .

E 1

Definition E 1:

Besitzen die Funktionen  $f$  und  $F$  einen gemeinsamen Definitionsbereich  $D_f$  und gilt  $F' = f$  für alle  $x \in D_f$ , so heißt  $F$  **Stammfunktion von  $f$  (in  $D_f$ )**.

Der Vorgang des Aufsuchens einer Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion wird als *Integration*<sup>1)</sup> bezeichnet.

<sup>1)</sup> integratio (lat.) – Wiederherstellen eines Ganzen; integrare (lat.) – wiederherstellen

Also:

Gegeben		Gesucht
(1) Funktion $f$	$\xrightarrow{\text{Differenzieren}}$	Ableitungsfunktion $f'$
(2) Funktion $f$	$\xrightarrow{\text{Integrieren}}$	Stammfunktion $F$ mit $F' = f$

Eine Stammfunktion  $F$  zu einer Funktion  $f$  lässt sich oft aus den Erfahrungen beim Differenzieren gewinnen, wenn man in der gegebenen Funktion  $f$  die Ableitung einer bekannten Funktion  $F$  erkennt. Wir kontrollieren das Ergebnis, indem wir  $F$  differenzieren und mit  $f$  vergleichen.

### Beispiel E 2:

Es sind zu den gegebenen Funktionen  $f$  Stammfunktionen  $F$  zu bestimmen.

a)  $f(x) = 6x$

Eine Stammfunktion von  $f$  ist  $F(x) = 3x^2$ , denn  $F'(x) = 3 \cdot 2x = f(x)$  und  $D_f = D_F$ .

b)  $f(x) = x^2$

Eine Stammfunktion von  $f$  ist  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ , denn  $F'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2 = f(x)$  und  $D_f = D_F$ .

c)  $f(x) = 7$

Eine Stammfunktion von  $f$  ist  $F(x) = 7x$ , denn  $F'(x) = 7 = f(x)$  und  $D_f = D_F$ .<sup>1)</sup>

E 2

Der Vorgang *Ermitteln einer Stammfunktion  $F$  zu einer Funktion  $f$*  ist die Umkehrung des Vorgangs *Bilden der Ableitung einer Funktion  $F$* . Solche Zusammenhänge *Operation – Umkehroperation* sind uns im Mathematikunterricht schon häufig begegnet, z.B. *Addition – Subtraktion*, *Multiplikation – Division*, *Potenzieren – Radizieren*.

Beim Bilden der Umkehroperation ist stets die Frage nach der Eindeutigkeit interessant. In unserem Falle die Frage also: Lassen sich für die Funktion  $f(x) = 6x$  aus Beispiel E 2 noch weitere Stammfunktionen angeben? Dies trifft zu, denn beispielsweise sind auch  $F(x) = 3x^2 + 2$  oder  $F(x) = 3x^2 - 4$  Stammfunktionen für  $f(x) = 6x$ , da die konstanten Summanden beim Differenzieren wegfallen.

Also: Wenn es zu einer Funktion  $f$  eine Stammfunktion  $F$  gibt, so existieren unendlich viele weitere Stammfunktionen, die sich nur um eine additive Konstante unterscheiden.

### Satz E 1: **Stammfunktionen einer Funktion**

Es sei  $F_1$  eine Stammfunktion von  $f$  in  $D$ .  $F_2$  ist genau dann eine Stammfunktion von  $f$ , wenn es eine Zahl  $C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ) gibt, so dass  $F_2(x) = F_1(x) + C$  für alle  $x \in D$  gilt.

E 1

*Beweis:*

Weil es sich bei dem vorliegenden Satz um eine Äquivalenzaussage handelt, müssen wir den Beweis „in beiden Richtungen“ führen.

- Es sei  $F_2(x) = F_1(x) + C$  (für alle  $x \in D$ )<sup>2)</sup>. Dann ist  $F_2$  differenzierbar und es gilt  $F_2'(x) = F_1'(x)$ . Da nach Voraussetzung  $F_1'(x) = f(x)$ , folgt  $F_2'(x) = f(x)$ , d. h.,  $F_2$  ist ebenfalls eine Stammfunktion von  $f$ .
- Es sei  $F_2$  Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt  $F_2'(x) = f(x)$ . Da nach Voraussetzung auch  $F_1'(x) = f(x)$  ist, folgt  $F_2'(x) = F_1'(x)$  bzw.  $F_2'(x) - F_1'(x) = 0$ .

<sup>1)</sup> Auf die Übereinstimmung der beiden Definitionsbereiche wird nachfolgend nur noch in Ausnahmefällen speziell hingewiesen.

<sup>2)</sup> Diese Voraussetzung sei auch für alle weiteren Aussagen erfüllt; es wird darauf nicht mehr gesondert hingewiesen.

Das heißt: Die Differenzenfunktion  $F_2(x) - F_1(x)$  hat die Ableitung 0. Sie muss daher eine konstante Funktion sein:  $F_2(x) - F_1(x) = C$  bzw.  $F_2(x) = F_1(x) + C$  w. z. b. w.

## E 3

Beispiel E 3:

Zu der Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$  sind drei Stammfunktionen anzugeben und grafisch darzustellen. Was kann über die Graphen ausgesagt werden?

Stammfunktionen sind z. B. die Funktionen

$$F_1(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2, \text{ denn } F_1'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x; \quad F_2(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2, \text{ denn } F_2'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x;$$

$$F_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2, \text{ denn } F_3'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Es entsteht eine Schar von Kurven, die auseinander durch Verschiebung in Richtung der Ordinatenachse um  $C$  hervorgehen (Fig. E 1a und b).

Fig. E 1c gibt die Kurvenschar für  $C \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$  an.

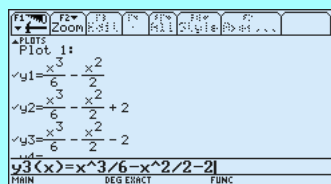


Fig. E 1a

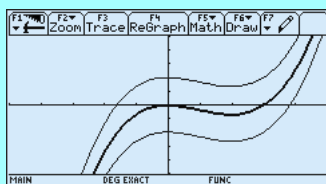


Fig. E 1b

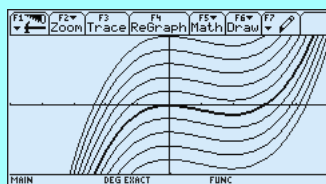


Fig. E 1c

Beim Suchen nach einer Stammfunktion  $F$  zu einer gegebenen Funktion  $f$  lösen wir inhaltlich die Gleichung  $F' = f$ . Die Lösung(en) dieser Gleichung (einer *Differentialgleichung*) kann man in einem Koordinatensystem gut veranschaulichen: Zu jedem Abzissenwert  $x$  mit  $x \in [a; b]$  lässt sich nämlich  $f(x) = F'(x)$ , also der Anstieg von  $F$  in jedem Punkt  $P(x; y)$ , berechnen und durch ein entsprechend gerichtetes Streckenstück darstellen. Dieses Streckenstück kann man als Teil der Tangente an den Graphen von  $F$  im Punkt  $P(x; y)$  auffassen. Da die Ordinate  $y$  frei wählbar ist, ergibt sich ein Richtungsfeld. Jede Stammfunktion  $F_i$  erscheint dort als Pfad (Fig. E 2).

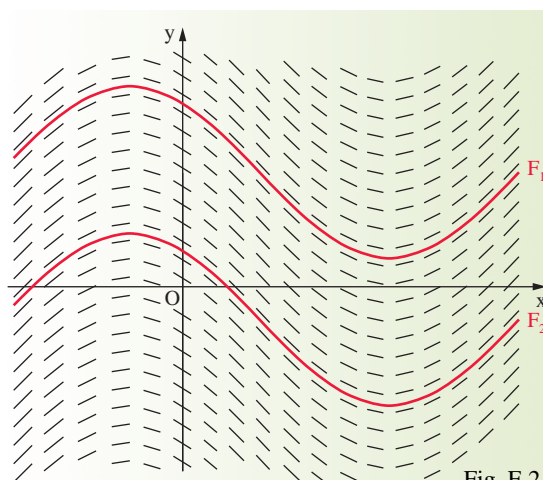


Fig. E 2

Wir haben festgestellt, dass eine gegebene Funktion  $f$  eine ganze Schar von Stammfunktionen besitzt. Für die Menge aller Stammfunktionen einer gegebenen Funktion  $f$  wird ein neuer Begriff eingeführt.

## E 2

Definition E 2:

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion  $f$  heißt **unbestimmtes Integral** von  $f$ .

Man schreibt  $\int f(x) dx = \{F(x) \mid F'(x) = f(x)\}$ .

Will man die Mengenschreibweise vermeiden, kann man auch nur mit einem Repräsentanten arbeiten:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (F'(x) = f(x), C \in \mathbb{R})$$

Dabei bezeichnet man

$f(x)$  als *Integrandenfunktion* – kurz: *Integrand*,  $x$  als *Integrationsvariable*,

$C$  als *Integrationskonstante*,  $dx$  als *Differential*

des unbestimmten Integrals  $\int f(x)dx$  – gelesen: *Integral über  $f$  von  $x$   $dx$* .

Das neu eingeführte Zeichen  $\int$  wird als *Integralzeichen* bezeichnet. Es kann nie allein mit einer Funktion stehen. Zu jedem Integralzeichen gehört immer auch die Angabe eines Differentials, das festlegt, „nach welcher Variablen integriert“ werden soll.

Das *Integralzeichen*  $\int$  wurde 1675 von Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) als Symbol für eine Summe eingeführt. Das Wort *Integral* geht auf die Brüder Jakob und Johann BERNOULLI (1645–1705 bzw. 1667–1748) zurück.

Beispiel E 4:

Es sind die nachfolgenden **unbestimmten Integrale** zu ermitteln.

a)  $\int 3x^2 dx =$

Die Funktion  $f(x) = 3x^2$  ist der Integrand,  $x$  ist die Integrationsvariable, d. h., es soll nach  $x$  integriert werden.

Aus der Differentialrechnung wissen wir, dass die Funktion  $F(x) = x^3$  die Ableitung  $3x^2$  besitzt.  $F(x) = x^3$  ist also eine Stammfunktion von  $f(x) = 3x^2$ . Somit ergibt sich die

Lösung:  $\int 3x^2 dx = x^3 + C$  ( $C \in \mathbb{R}$ )

Probe:  $F(x) = x^3 + C \Rightarrow F'(x) = 3x^2 = f(x)$

b)  $\int ax dx = \int ax da = \int ax dv =$

In diesem Beispiel soll der Integrand  $ax$  nach verschiedenen Variablen integriert werden.

Die Variablen, die nicht im Differential auftreten, sind als Konstanten anzusehen. Also:

$$\int ax dx = \frac{a}{2} x^2 + C \quad \int ax da = \frac{x}{2} a^2 + C \quad \int ax dv = ax \cdot v + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

c)  $\int dx = x + C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ) Spezialfall

E 4

## E 1.2 Regeln für das Ermitteln von unbestimmten Integralen

Um Regeln zum Ermitteln von unbestimmten Integralen (*Integrationsregeln*) zu finden, können wir auf die **Differentiationsregeln** (Regeln zum Bestimmen der Ableitungsfunktion) zurückgreifen.

Beispiel E 5:

Zu den folgenden Integrandenfunktionen  $f(x)$  sind die unbestimmten Integrale zu ermitteln.

Integrand $f(x)$	Integral $\int f(x) dx$	Integrand $f(x)$	Integral $\int f(x) dx$
$x$	$\frac{1}{2} x^2 + C$ <sup>1)</sup>	$x^n$ ( $n \neq -1$ )	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
$x^2$	$\frac{1}{3} x^3 + C$	$\frac{1}{x^2}$ ( $x \neq 0$ )	$-\frac{1}{x} + C$

E 5

<sup>1)</sup> Da die Integrationskonstante eine beliebig reelle Zahl ist, können wir für sie in jedem Fall  $C$  schreiben.

Also: Da sich beim Differenzieren einer Potenz deren Exponent (Grad) um 1 erniedrigt, muss beim Integrieren der Exponent (Grad) um 1 erhöht werden. Ein Ausgleich des auftretenden Faktors beim Differenzieren wird durch Verwendung seines Reziproken als Faktor beim Integrieren erreicht.

Hieraus lässt sich die folgende Regel gewinnen:

E 2

**Satz E 2: Potenzregel**

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \text{ mit } n \in \mathbb{Z}, n \neq -1 \text{ (und zusätzlich } x \neq 0, \text{ falls } n < -1), C \in \mathbb{R}.$$

Der Fall  $n = -1$  muss gesondert untersucht werden, da wir keine Potenzfunktion kennen, deren Ableitung  $\frac{1}{x} = x^{-1}$  ist. Außerdem wäre der Term  $\frac{1}{n+1}$  für  $n = -1$  nicht erklärt.

Diese Regel kann auch auf Potenzen mit reellen Exponenten erweitert werden.

E 3

**Satz E 3: Erweiterte Potenzregel**

Für die Potenzfunktion  $f(x) = x^q$  mit  $q \in \mathbb{R}, q \neq -1$  und  $x > 0$  gilt

$$\int x^q dx = \frac{1}{q+1} x^{q+1} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Um weitere Regeln finden zu können, sollen die folgenden Beispiele unter Nutzung der Kenntnisse aus der Differentialrechnung betrachtet werden.

E 6

**Beispiel E 6:**

$$\text{a) } \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C \quad \int 2x^3 dx = \frac{2}{4} x^4 + C \quad \int a \cdot x^3 dx = \frac{a}{4} x^4 + C \quad (a, C \in \mathbb{R})$$

Eine Stammfunktion zur Funktion  $f(x) = a \cdot x^3$  erhält man durch Multiplikation der Stammfunktion von  $f(x) = x^3$  mit  $a$ . Entsprechendes gilt für die zugehörigen unbestimmten Integrale (wenn man berücksichtigt, dass  $a \cdot C$  wieder eine reelle Zahl ist).

$$\text{b) } \int (2x^2 + 3x - 4) dx =$$

Da Summen gliedweise differenziert werden, gehen wir beim Integrieren ebenfalls summandenweise vor.

$$\int (2x^2 + 3x - 4) dx = \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 4x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Die Probe durch Differentiation bestätigt das Ergebnis.

Obige Beispiele lassen den folgenden Satz vermuten:

E 4

**Satz E 4:**

Es seien  $f$  und  $g$  stetige Funktionen. Dann gilt:

$$(1) \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

Konstante Faktoren bleiben beim Integrieren erhalten.

**Faktorregel 1**

$$(2) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Summen und Differenzen können gliedweise integriert werden.

**Summenregel 1**

*Beweis:*

Zu (1):

Diese Regel ist eine Äquivalenzaussage. Der Beweis muss deshalb in „beiden Richtungen“ geführt werden.

F sei eine Stammfunktion von f, d. h.,  $F' = f$  bzw.  $\int f(x) dx = F(x) + C$ .

- a) Für  $k \in \mathbb{R}$  gilt  $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot F(x) + C$ , denn nach den entsprechenden [Regeln der Differentialrechnung](#) ist  $[k \cdot F(x) + C]' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$ .

Da F eine Stammfunktion von f ist, also abgesehen von einer additiven Konstanten

$$k \cdot F(x) = \int k \cdot f(x) dx \text{ gilt, folgt } \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx.$$

- b) Für  $k \in \mathbb{R}$  gilt  $k \cdot \int f(x) dx = k \cdot [F(x) + C] = k \cdot F(x) + k \cdot C$ .

Wegen  $C \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{R}$  ist auch  $k \cdot C = C^* \in \mathbb{R}$  und  $k \cdot F(x) + C^* = \int k \cdot f(x) dx$ , denn

$$[k \cdot F(x) + C^*]' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x).$$

w. z. b. w.

Zu (2):

Der Beweis kann unter Verwendung der Summenregel der Differentialrechnung geführt werden.

Diese beiden Regeln aus Satz E 4 lassen sich auch zu einer Regel zusammenfassen:

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)] dx = k_1 \int f_1(x) dx + k_2 \int f_2(x) dx + \dots + k_n \int f_n(x) dx$$

Beispiel E 7:

Man ermittle das unbestimmte Integral  $\int (3x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 9) dx$ .

Der Integrand besteht aus einer Summe von Funktionen, die nach der Summenregel gliedweise integriert werden kann, wobei die konstanten Faktoren in jedem Summanden vor das Integral gesetzt werden sollten (*Faktorregel*).

Man erhält:

$$\int (3x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 9) dx = 3 \int x^4 dx + \frac{1}{2} \int x^2 dx - 6 \int x dx + 9 \int dx$$

Wir wenden die Potenzregel an und vereinfachen:

$$= 3 \cdot \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 - 6 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 9x + C = \frac{3}{5} x^5 + \frac{1}{6} x^3 - 3x^2 + 9x + C$$

Die Integrationskonstante C ist als Summe der Integrationskonstanten der einzelnen Integrale aufzufassen. Wir schreiben bei Summen eine gemeinsame Integrationskonstante.

Probe durch [Differentiation](#):  $[\frac{3}{5} x^5 + \frac{1}{6} x^3 - 3x^2 + 9x + C]' = 3x^4 + \frac{1}{2} x^2 - 6x + 9$

E 7

In der folgenden Übersicht sind einige aus den Integrationsregeln oder aus Differentiationsformeln gewonnene Integrale zusammengestellt, die eine Grundlage für das Integrieren komplizierterer Funktionen bilden:

$\int dx = x + C$	$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$
$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C \quad (x \geq 0)$	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad (x \neq 0)$
$\int x^n dx = \frac{1}{(n+1)} x^{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{R}, n \neq -1, x > 0)$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$

Mithilfe dieser Integrale sowie der Faktor- und der Summenregel sind wir in der Lage, unbestimmte Integrale ganzrationaler Funktionen, einfacher gebrochenrationaler Funktionen und einfacher Wurzelfunktionen zu ermitteln.

## E 8

## Beispiel E 8:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int (3x^7 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{x^2} + 4\sqrt{x}) dx &= 3 \int x^7 dx + \frac{1}{2} \int x dx - 2 \int x^{-2} dx + 4 \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= 3 \cdot \frac{1}{8} x^8 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 - 2(-x^{-1}) + 4 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{3}{8} x^8 + \frac{1}{4} x^2 + \frac{2}{x} + \frac{8}{3} \sqrt{x^3} + C \end{aligned}$$

(Auf die Angabe der Probe durch Differentiation sei hier und nachfolgend verzichtet.)

Dieses Beispiel zeigt: Es ist günstig, vor Beginn der Rechnung Faktoren vor das Integralzeichen zu ziehen sowie ggf. Wurzelausdrücke und Brüche mit Variablen in Potenzschreibweise darzustellen.

$$\text{b) } \int \frac{(3x-4)}{5x^3} dx =$$

In der vorliegenden Form des Integranden können wir unsere bekannten Regeln nicht anwenden. Dividieren wir aber die Zählerfunktion gliedweise durch den Nenner, erreichen wir eine bekannte Form:

$$\begin{aligned} &= \int \left( \frac{3x}{5x^3} - \frac{4}{5x^3} \right) dx = \frac{3}{5} \int \frac{1}{x^2} dx - \frac{4}{5} \int \frac{1}{x^3} dx \\ &= \frac{3}{5} \int x^{-2} dx - \frac{4}{5} \int x^{-3} dx = -\frac{3}{5} x^{-1} + \frac{2}{5} x^{-2} + C = -\frac{3}{5x} + \frac{2}{5x^2} + C \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int a x^2 da =$$

Im Integranden dieses Integrals treten die zwei Variablen  $a$  und  $x$  auf. Nach welcher Variablen integriert werden soll, entnehmen wir dem Differential – hier  $da$ .  $x$  ist demzufolge als Konstante anzusehen (vgl. Beispiel E 4).

$$= x^2 \int a da = \frac{1}{2} x^2 a^2 + C$$

- d) Die auszuführenden Umformungen können bei umfangreichen und komplizierten Funktionstermen der Integrandenfunktionen recht aufwändig werden. Hier ist der Einsatz eines GTA eine effektive Hilfe.

$$\begin{aligned} &\bullet \int (3x^2 - 4)^3 dx = \\ &\bullet \int \frac{9x^6 - 3x^3 - 12}{6x^2} dx = \end{aligned}$$

The screenshot shows a TI-84 Plus calculator in the 'Algebra' mode. The input is  $(3x^2 - 4)^3$ . The result shown is  $\frac{27x^7}{7} - \frac{108x^5}{5} + 48x^3 - 64x$ . Below this, the result is simplified to  $\frac{9x^6 - 3x^3 - 12}{6x^2}$ . The screen also shows the 'F1' through 'F6' function keys at the top and 'F1' through 'F6' at the bottom.

Fig. E 3

Am Bildschirm erscheint jeweils eine Stammfunktion.

Diese Beispiele machen deutlich, dass es beim Ermitteln unbestimmter Integrale oft darauf ankommt, den Integranden systematisch so umzuformen, dass Ausdrücke entstehen, die mithilfe der bisher kennen gelernten grundlegenden Integrale und Integrationsregeln integriert werden können. Es wird sich allerdings bald zeigen, dass dieses Vorgehen nur bei wenigen Integralen zum Ziel führt. Deshalb werden in diesem Kapitel noch weitere „Grundintegrale“ und weitere Integrationsmethoden betrachtet.

## E 2 Das bestimmte Integral

### E 2.1 Flächeninhalt unter der Normalparabel

Der Fahrtschreiber eines LKW zeichnet das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm des Bewegungsablaufes auf (Fig. E 4). Einen Ausschnitt dieses Diagramms stellen wir uns in ein rechtwinkliges Koordinatensystem transformiert vor (Fig. E 5).

Es soll nun die Frage erörtert werden, ob sich aus diesem Diagramm eine Angabe über in bestimmten Zeitintervallen zurückgelegte Wege gewinnen lässt. Wir überlegen dazu:

Ist die Geschwindigkeit  $v$  konstant, so gilt für den in der Zeit  $t$  zurückgelegten Weg  $s = v \cdot t$ .

Bei geometrischer Interpretation ist die Maßzahl des Weges also gleich dem Inhalt der Fläche unter dem Graphen der konstanten Funktion  $v(t)$  im Intervall  $[t_1; t_2]$ , d. h. gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seiten  $t_2 - t_1 = \Delta t$  und  $v(t_1) = v(t_2)$  (Fig. E 6).

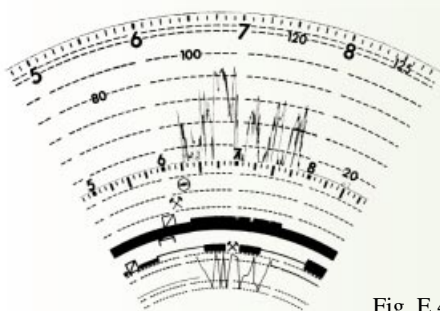


Fig. E 4

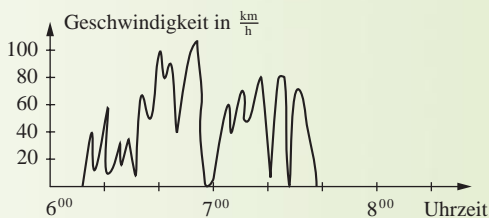


Fig. E 5

Überträgt man dieses Vorgehen auf die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion  $v(t)$  im Fahrtschreiberdiagramm, so wäre hier ebenfalls (maßzahlmäßig) der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen (der Kurve) und der x-Achse in bestimmten Zeitintervallen gleich dem in diesem Zeitintervall zurückgelegten Weg.

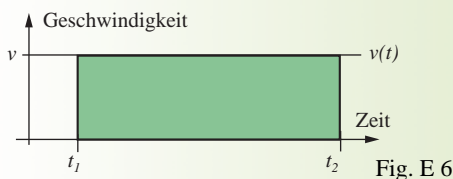


Fig. E 6

Im Folgendem soll nun untersucht werden, wie man den Inhalt solcher (krummlinig begrenzten) Flächen berechnet.

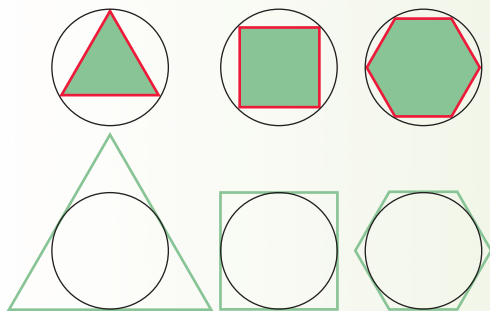


Fig. E 7a

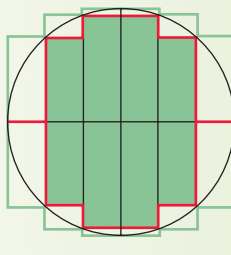


Fig. E 7b

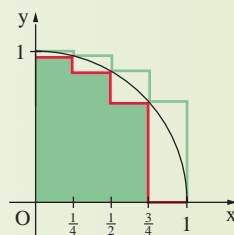


Fig. E 7c

Im Planimetrieunterricht wurde der Flächeninhalt verschiedener ebener Figuren bestimmt, z. B. der Flächeninhalt von Rechtecken, Parallelogrammen, Trapezen, Dreiecken, Vielecken und Kreisen.

Während sich die Berechnung des Flächeninhalts von geradlinig begrenzten Figuren relativ einfach gestaltete, war die Berechnung der Kreisfläche etwas schwieriger, doch es konnte ebenfalls eine Formel gefunden werden.

Dabei war beispielsweise das Verfahren des Ein- bzw. Umbeschreibens der zu berechnenden Figur (hier also des Kreises) durch berechenbare Figuren (regelmäßige  $n$ -Ecke; Fig. E 7a) oder das Ausfüllen der betreffenden Fläche mit Rechteckflächen nützlich (Fig. E 7b).

Um die Flächeninhaltsformel für den Kreis zu gewinnen, kann man in diesem Sinne einem Viertelkreis mit dem Radius  $r = 1$  (LE) Rechtecke ein- und umbeschreiben (Fig. E 7c). Die Viertelkreisfläche liegt dann zwischen der Summe der Flächeninhalte von ein- bzw. umbeschriebenen Rechtecken und sie wird von dieser „oberen“ bzw. „unteren“ Rechteckfläche umso besser angenähert, je größer  $n$  ist. Für  $n = 256$  z. B. erhält man  $A_{VK} \approx 0,7854$ , einen guten Näherungswert für  $A_{VK} = \frac{\pi}{4}$ . Der Kreis blieb allerdings die einzige krummlinig begrenzte Figur, deren Flächeninhalt wir berechnen können.

Die Bemühungen, den Flächeninhalt krummlinig begrenzter Figuren zu ermitteln, reichen mathematikgeschichtlich sehr weit zurück. Zum einen geschah das aus praktischen Erwägungen, zum anderen reizte jedoch die Kompliziertheit dieses Problems die Mathematiker. Die ersten größeren Erfolge gehen auf den griechischen Gelehrten HIPPOKRATES zurück. Er berechnete etwa 450 v. Chr. verschiedene mündchenartig geformte Flächenstücke (*die Mündchen des HIPPOKRATES*) exakt (Fig. E 8).

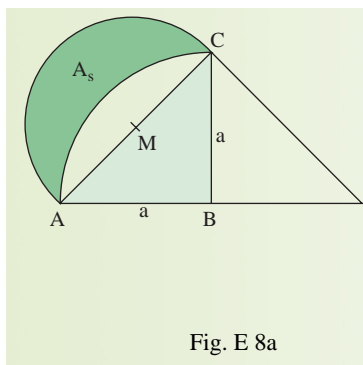


Fig. E 8a

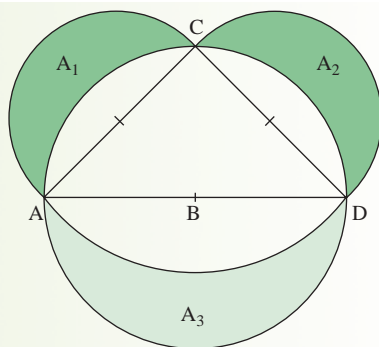


Fig. E 8b

HIPPOKRATES berechnete den Flächeninhalt  $A_s$  der „Sichel“ in Fig. E 8a und erhielt  $A_s = \frac{a^2}{2}$ . Diese „Sichel“ und das Dreieck ABC in dieser Figur sind somit flächengleich. HIPPOKRATES konnte durch analoge Überlegungen zeigen, dass in Fig. E 8b für die Flächeninhalte der „Sicheln“ gilt:

$$A_3 = A_1 + A_2.$$

In den folgenden 200 Jahren bemühten sich viele Mathematiker um die exakte Berechnung des Flächeninhaltes parabolisch, elliptisch und hyperbolisch begrenzter Flächen. Um 260 v. Chr. gelang es dem griechischen Gelehrten ARCHIMEDES (287–212 v. Chr.) Parabelsegmente zu berechnen. Er entwickelte die sogenannte *Exhaustionsmethode*, d. h., er „schöpfte“ die unbekannte Fläche durch eine Folge berechenbarer Flächen aus. Auf diese Weise konnte auch die Kreisfläche bestimmt werden.

Dann allerdings dauerte es fast 2000 Jahre, bis ARCHIMEDES auf diesem Gebiet Nachfolger in CAVALLIERE (1598–1647), NEWTON (1643–1727) und LEIBNIZ (1646–1716) fand. Diese entwickelten neben anderen Mathematikern Methoden, mit deren Hilfe Flächeninhaltsberechnungen für beliebige Flächen sehr leicht und schnell erfolgen können.

Im Folgenden soll der Inhalt der Fläche berechnet werden, die der Graph der Funktion  $f(x) = x^2$ , die  $x$ -Achse und die Geraden  $x = a$  und  $x = b$  begrenzen, d.h. den Inhalt der Fläche unter der Normalparabel im Intervall  $[a; b]$  (Fig. E 9). Zunächst wird dabei das Intervall  $[0; 1]$  betrachtet. Wir nehmen zum Lösen des Problems das von ARCHIMEDES entwickelte Vorgehen zu Hilfe und versuchen, die Fläche unter der Normalparabel im Intervall  $[0; 1]$  durch Figuren mit leicht berechenbaren Inhalten auszufüllen. Dazu verwenden wir Rechtecke.

Das „Ausfüllen“ soll wie bei der Kreisberechnung durch „Einbeschreiben“ oder „Umbeschreiben“ der zu berechnenden Fläche geschehen.

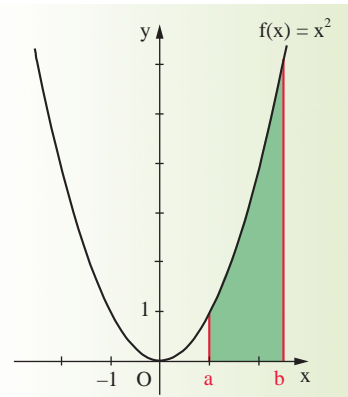


Fig. E 9

einbeschriebene Teilflächen	umbeschriebene Teilflächen	Teilung	Anzahl der Teilintervalle	Länge der Teilintervalle
		0	1	1
		1	2	$\frac{1}{2}$
		2	4	$\frac{1}{4}$
		3	8	$\frac{1}{8}$

Fig. E 10

Dabei ist der Flächeninhalt der durch Einbeschreiben entstehenden Treppenfigur stets kleiner, der Flächeninhalt der durch Umbeschreiben entstehenden Treppenfigur stets größer als der gesuchte Flächeninhalt. Je größer jedoch die Anzahl der verwendeten Rechtecke wird, d.h., je kleiner die verwendete Rechteckbreite gewählt wird, umso besser nähern wir uns dem eigentlichen Wert an.

Ermitteln wir die jeweiligen Flächeninhalte für  $f$  mit  $f(x) = x^2$ :

n	Einbeschriebene Treppenfigur (Untere Rechtecksumme)	Umbeschriebene Treppenfigur (Obere Rechtecksumme)
0	$s_0 = 1 \cdot f(0) = 1 \cdot 0 = 0$	$S_0 = 1 \cdot f(1) = 1 \cdot 1 = 1$
1	$s_1 = \frac{1}{2} \cdot f(0) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot [f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)]$ $= \frac{1}{2} \cdot [0 + \frac{1}{4}] = \frac{1}{8} = 0,125$	$S_1 = \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f(1) = \frac{1}{2} \cdot [f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)]$ $= \frac{1}{2} \cdot [\frac{1}{4} + 1] = \frac{5}{8} = 0,625$
2	$s_2 = \frac{1}{4} \cdot f(0) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{3}{4}\right)$ $= \frac{1}{4} \cdot [f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)]$ $= \frac{1}{4} \cdot [0 + \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16}]$ $= \frac{14}{64} \approx 0,219$	$S_2 = \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{4}{4}\right)$ $= \frac{1}{4} \cdot [f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{4}{4}\right)]$ $= \frac{1}{4} \cdot [\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16}]$ $= \frac{30}{64} \approx 0,469$
3	$s_3 = \frac{1}{8} \cdot f(0) + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{1}{8}\right) + \dots + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{7}{8}\right)$ $= \frac{1}{8} \cdot [f(0) + f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{2}{8}\right) + \dots + f\left(\frac{7}{8}\right)]$ $= \frac{1}{8} \cdot [0 + \frac{1}{64} + \frac{4}{64} + \dots + \frac{49}{64}]$ $= \frac{140}{512} \approx 0,273$	$S_3 = \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{2}{8}\right) + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{3}{8}\right) + \dots + \frac{1}{8} \cdot f\left(\frac{8}{8}\right)$ $= \frac{1}{8} \cdot [f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{2}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + \dots + f\left(\frac{8}{8}\right)]$ $= \frac{1}{8} \cdot [\frac{1}{64} + \frac{4}{64} + \frac{9}{64} + \dots + \frac{64}{64}]$ $= \frac{204}{512} \approx 0,398$

Bei fortgesetzter Halbierung der Teilintervalle entstehen die beiden Zahlenfolgen

$$(s_n) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{i-1}{2^n}\right)^2$$

$$(S_n) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{i}{2^n}\right)^2$$

Fassen wir das bisher Erreichte zusammen:

- (1) Der gesuchte Flächeninhalt liegt zwischen  $0,273 < A < 0,398^{1)}$ .
- (2) Mit wachsendem  $n$  nähern sich die Glieder der beiden Zahlenfolgen dem gesuchten Flächeninhalt  $A$  immer mehr an. Damit liegt nahe:
- (3) Der gesuchte Flächeninhalt kann vielleicht als gemeinsamer **Grenzwert der beiden Zahlenfolgen** bestimmt werden.

Wir berechnen die beiden Grenzwerte. Dazu formen wir die Summenformeln zunächst um und setzen der Übersichtlichkeit halber  $2^n = k$ . Es ergibt sich:

$$s_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i-1}{k}\right)^2$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{(i-1)^2}{k^2} = \frac{1}{k^3} \sum_{i=1}^k (i-1)^2$$

$$S_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i}{k}\right)^2$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{i^2}{k^2} = \frac{1}{k^3} \sum_{i=1}^k i^2$$

<sup>1)</sup> Bei Inhaltsberechnungen wird hier und im Folgenden immer nur die Maßzahl angegeben.

Nach der Summenformel für Quadratzahlen  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$  („Formeln und Tabellen“, S. 41) erhalten wir daraus:

$$s_n = \frac{1}{k^3} \cdot \frac{(k-1)k(2k-1)}{6}$$

$$= \frac{1}{k^3} \cdot \frac{2k^3 - 3k^2 + k}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k^2}$$

$$S_n = \frac{1}{k^3} \cdot \frac{k(k+1) \cdot (2k+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{k^3} \cdot \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k^2}$$

Wir ersetzen wieder  $2^n$  für  $k$ :

$$s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 2^n} + \frac{1}{6 \cdot 2^{2n}}$$

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 2^n} + \frac{1}{6 \cdot 2^{2n}}$$

Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

Mit diesem gemeinsamen Grenzwert  $\frac{1}{3}$  der Folgen  $(s_n)$  und  $(S_n)$  wurde ein Wert für den Inhalt der Fläche unter der Normalparabel im Intervall  $[0; 1]$  ermittelt:  $A = \frac{1}{3}$ .

ARCHIMEDES kam vor mehr als 2000 Jahren auch zu diesem Ergebnis, nutzte jedoch eine andere Einteilung des Intervalls. Er teilte das Intervall  $[0; 1]$  in  $n$  gleiche Teile, verwendete für die Berechnung also Rechtecke der Breite  $\frac{1}{n}$ . Dadurch ergaben sich für die untere und die obere Rechtecksumme einfachere Ausdrücke:

$$(s_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2$$

$$(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

Durch Anwendung der bereits damals bekannten Formel für die Summe der ersten  $k$  Quadratzahlen erhielt ARCHIMEDES bei der Grenzwertbestimmung wie oben den gemeinsamen Grenzwert  $\frac{1}{3}$ . Ihm war damit die exakte Berechnung des Flächeninhalts eines Parabelsegments gelungen.

Wir wollen nun überlegen, ob sich auf diese Weise auch der Flächeninhalt unter der Normalparabel im Intervall  $[0; b]$  mit  $b > 0$  bestimmen lässt (Fig. E 11):

- (1) Wir teilen das Intervall  $[0; b]$

wie ARCHIMEDES in  $n$  gleich lange Teilintervalle. Jedes Teilintervall hat die Länge  $\frac{b}{n}$ . (Fig. E 12, dort ist  $n = 7$ .)

- (2) Für jeden Teilpunkt  $x_i$  im Intervall bestimmen wir den zugehörigen Funktionswert.

$$f(x_0) = f(0) = 0^2$$

$$f(x_1) = f\left(1 \cdot \frac{b}{n}\right) = \left(1 \cdot \frac{b}{n}\right)^2$$

$$f(x_2) = f\left(2 \cdot \frac{b}{n}\right) = \left(2 \cdot \frac{b}{n}\right)^2$$

$\vdots$

$$f(x_n) = f\left(n \cdot \frac{b}{n}\right) = \left(n \cdot \frac{b}{n}\right)^2$$

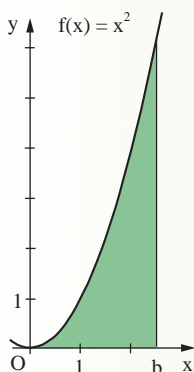


Fig. E 11

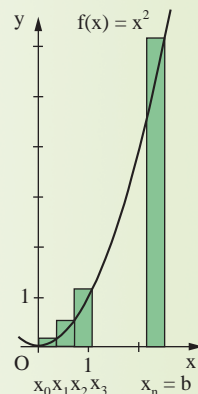
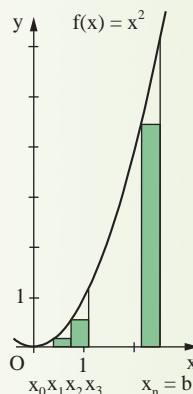


Fig. E 12

(3) Wir berechnen die untere und die obere Rechtecksumme.

Breite der Rechtecke:  $\frac{b}{n}$

Länge der Rechtecke: jeweils kleinster bzw. größter Funktionswert im jeweiligen Intervall

$$s_n = \frac{b}{n} [f(0) + f(1 \cdot \frac{b}{n}) + \dots + f((n-1) \cdot \frac{b}{n})] \quad S_n = \frac{b}{n} [f(1 \cdot \frac{b}{n}) + f(2 \cdot \frac{b}{n}) + \dots + f(n \cdot \frac{b}{n})]$$

$$s_n = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(i-1) \cdot b}{n} \right]^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \quad S_n = \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{i \cdot b}{n} \right]^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

(4) Diese beiden Ausdrücke unterscheiden sich von den auf S. 146 f. betrachteten nur durch den Faktor  $b^3$ . Berechnen wir auch hier jeweils den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$ , so ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{b^3}{3} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b^3}{3}.$$

Der Inhalt A der Fläche unter der Normalparabel im Intervall  $[0; b]$  beträgt somit  $A = \frac{b^3}{3}$ .

Wir stellen fest: Anstelle der fortgesetzten Halbierungen kann eine Teilung in  $n$  gleiche Intervalle vorgenommen werden. Es ist sogar möglich, ein Teilverfahren zu wählen, wo die Rechtecke in der jeweiligen Treppenfigur unterschiedlich breit sind – es muss nur darauf geachtet werden, dass bei fortgesetzter Teilung die Breite aller Rechtecke gegen 0 strebt. In weiteren Beispielen sollen nur solche Teilungen verwendet werden, bei denen die Rechtecke gleich breit sind.

Um das eingangs gestellte Problem vollständig zu lösen, nutzen wir die bisher bereits erzielten Erkenntnisse. Wir wissen:

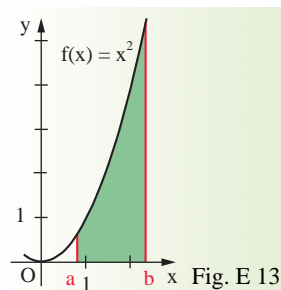
(1) Für den Flächeninhalt unter der Normalparabel im Intervall  $[0; a]$  gilt  $A_1 = \frac{a^3}{3}$ .

(2) Für den Flächeninhalt unter der Normalparabel im Intervall  $[0; b]$

$$\text{gilt } A_2 = \frac{b^3}{3}.$$

Als Flächeninhalt unter der Normalparabel über dem Intervall  $[a; b]$  mit  $a < b$  ergibt sich somit

$$A = A_2 - A_1 = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$



## E 2.2 Der Begriff *bestimmtes Integral*

Im Abschnitt E 2.1 wurde ein Weg gefunden, den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion  $f(x) = x^2$  über einem vorgegebenen Intervall zu bestimmen. Wir haben dazu die Grenzwerte der unteren und der oberen Rechtecksumme ermittelt. Nun wollen wir der Frage nachgehen, ob sich dieses Vorgehen auch auf andere Funktionen übertragen lässt und verallgemeinert werden kann.

Klären wir zunächst, mit welchen Funktionen man dabei arbeiten kann.

Bei der Berechnung der unteren und der oberen Rechtecksumme wurde in jedem Teilintervall der kleinste bzw. der größte Funktionswert als Länge der Rechtecke verwendet. Es liegt deshalb nahe, auch nachfolgend mit Funktionen zu arbeiten, die in einem Intervall  $[a; b]$  definiert sind und in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $[a; b]$  einen kleinsten und einen größten Funktionswert besitzen. Aus Kapitel C ist bekannt, dass jede stetige Funktion diese Bedingung erfüllt (Satz C 7). Auch jede nur monotone Funktion hat in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Definitionsbereiches einen kleinsten und einen größten Funktionswert. Darüber hinaus gibt es auch Funktionen mit dieser Eigenschaft, die weder stetig noch monoton sind (Fig. E 14).

Für die weiteren Betrachtungen sei  $f$  eine in einem abgeschlossenen Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion.  $f$  besitzt dann in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $[a; b]$  einen kleinsten und einen größten Funktionswert (Fig. E 15).

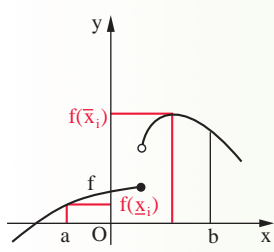


Fig. E 14

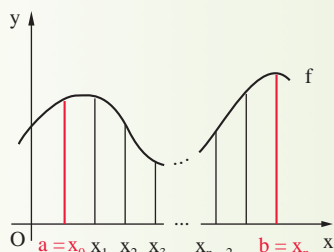


Fig. E 15

- (1) Wir wählen eine beliebige natürliche Zahl  $n$ ,  $n \geq 1$ , und zerlegen das Intervall  $[a; b]$  in  $n$  gleich lange Teilintervalle. Die Endpunkte der Teilintervalle seien  $a = x_0; x_1; x_2; \dots; x_{n-1}; x_n = b$ . Jedes Teilintervall hat die Länge  $\frac{b-a}{n} = \Delta x$ .
- (2) Für jedes Teilintervall bilden wir die Produkte  $f(x_i) \cdot \Delta x$  und  $f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$ , wobei  $f(x_i)$  der kleinste und  $f(\bar{x}_i)$  der größte Funktionswert im  $i$ -ten Teilintervall ist.
- (3) Wir bilden die Summen  $s_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$  und  $S_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$ .

Auf diese Weise werden jeder natürlichen Zahl  $n$ ,  $n \geq 1$ , die zwei Zahlen  $s_n$  und  $S_n$  zugeordnet, d. h., wir erhalten zwei Zahlenfolgen  $(s_n)$  und  $(S_n)$ .

Diese Folgen besitzen nachstehende Eigenschaften:

- a) Weil im Intervall  $[a; b]$  stets  $f(x) \cdot (b-a) \leq s_n \leq S_n \leq f(\bar{x}) \cdot (b-a)$  gilt, ist  $(s_n)$  nach oben beschränkt und  $(S_n)$  nach unten beschränkt.
- b) Da beim Übergang von der  $n$ -ten zur  $(n+1)$ -ten Zerlegung des Intervalls die zugehörige Summe  $s_{n+1}$  nicht kleiner sein kann als die Summe  $s_n$  bzw. die Summe  $S_{n+1}$  nicht größer sein kann als die Summe  $S_n$ , folgt:  
 $(s_n)$  ist monoton wachsend  $(S_n)$  ist monoton fallend.

Jede monoton wachsende (fallende) und nach oben (unten) beschränkte Folge konvergiert (Satz B 6).

Folglich existieren die beiden Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

Dies führt uns zu einem neuen Begriff:

#### Definition E 3:

Es sei  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  definierte Funktion, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $[a; b]$  einen kleinsten und einen größten Funktionswert besitzt.

Haben die beiden Folgen  $(s_n) = (\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x)$  und  $(S_n) = (\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x)$  einen gemeinsamen

Grenzwert, so heißt dieser gemeinsame Grenzwert das **bestimmte Integral** der Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$ .

In Kurzform:  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$  (gelesen: *Integral über  $f(x) dx$  von  $a$  bis  $b$* )

Dabei bezeichnet man  $a$  und  $b$  als *Integrationsgrenzen* und  $[a; b]$  als *Integrationsintervall*.

Wir kennen bereits

$f(x)$  als *Integrand*,  $x$  als *Integrationsvariable*,  $\int$  als *Integralzeichen*<sup>1)</sup>

und wissen: Das Integralzeichen kann nie allein mit einer Funktion stehen. Zu jedem Integralzeichen gehört auch die Angabe eines Differentials  $dx$ , das die Integrationsvariable festlegt.

Das bestimmte Integral  $\int_a^b f(x) dx$  ist *eine eindeutig festgelegte Zahl*, die nur von der Funktion  $f$  und den Integrationsgrenzen abhängt.

Bisher wurde fast immer  $x$  als Variable verwendet. Ersetzt man nun das  $x$  im Integranden und im Differential durch ein und dieselbe andere Variable, so ist das ohne Bedeutung für das bestimmte Integral. Die durch das bestimmte Integral gegebene Zahl wird dadurch nicht verändert. Es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt$$

### E 9

Beispiel E 9:

Es ist das **bestimmte Integral**  $\int_0^3 x^3 dx$  zu berechnen.

Die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = x^3$  ist stetig und hat damit in jedem abgeschlossenen Teilintervall einen kleinsten und einen größten Funktionswert. Wir wenden die obige Definition des bestimmten Integrals an.

(1) Zerlegen des Intervalls  $[0; 3]$  in  $n$  gleich lange Teilintervalle der Länge  $\Delta x$ :  $\Delta x = \frac{3}{n}$ .

(2) Bilden der Summen  $s_n$  und  $S_n$ ; das  $i$ -te Teilintervall ist  $[x_{i-1}; x_i]$ .

$$x_{i-1} = (i-1) \Delta x = (i-1) \frac{3}{n}$$

$$f(x_{i-1}) = \left[(i-1) \frac{3}{n}\right]^3$$

$$x_i = i \cdot \frac{3}{n}$$

$$f(x_i) = \left[i \cdot \frac{3}{n}\right]^3$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n (i-1)^3 \cdot \frac{3^3}{n^3} \cdot \frac{3}{n} = \frac{3^4}{n^4} \sum_{i=1}^n (i-1)^3$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n i^3 \cdot \frac{3^3}{n^3} \cdot \frac{3}{n} = \frac{3^4}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3$$

Für die Summe der ersten  $k$  Kubikzahlen gilt („Formeln und Tabellen“, S. 41)

$$\sum_{i=1}^k i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad \text{Also:}$$

$$s_n = \frac{3^4}{n^4} \cdot \frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$

$$S_n = \frac{3^4}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{3^4}{4} \cdot \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2} = \frac{3^4}{4} \cdot \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{3^4}{4} \cdot \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = \frac{3^4}{4} \cdot \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

(3) Berechnen der **Grenzwerte**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{3^4}{4} = \frac{81}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3^4}{4} = \frac{81}{4}$$

$$\text{Da } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{81}{4}, \text{ gilt } \int_0^3 x^3 dx = \frac{81}{4}.$$

<sup>1)</sup> Das von Gottfried Wilhelm LEIBNIZ eingeführte Integralzeichen  $\int$  erinnert an die Summenbildung. Das Zeichen  $dx$  hat seinen Ursprung in dem  $\Delta x$ , der Breite der Teilintervalle.

Das Bilden des Begriffs *bestimmtes Integral* erfolgte in enger Anlehnung an das Zerlegen einer Fläche in untere und obere Rechtecksummen. Deshalb stellt das bestimmte Integral auch eine Möglichkeit dar, die Eingangsfrage nach dem Flächeninhalt bestimmter Punktmengen zu beantworten.

#### Definition E 4:

Es sei  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  definierte und dort nichtnegative Funktion, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $[a; b]$  einen kleinsten und einen größten Funktionswert besitzt.

Dann ist das **bestimmte Integral**  $\int_a^b f(x) dx$  diejenige positive Zahl, die den Inhalt  $A$  der Fläche angibt, welche vom Graphen der Funktion  $f$ , der  $x$ -Achse und den Geraden  $x = a$  und  $x = b$  begrenzt wird:  $A = \int_a^b f(x) dx$ .

E 4

Mit dieser Definition haben wir eine *geometrische Deutung des bestimmten Integrals* vorgenommen.

#### Beispiel E 10:

Es ist zu untersuchen, ob man folgende bestimmte Integrale als Flächeninhalte deuten kann:

a)  $\int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx$

b)  $\int_{0,5}^3 (x - 1,5) dx$

#### Lösung:

a) Die Funktion  $f(x) = x^2 + 1$  genügt in  $[-1; 2]$  den Bedingungen von Definition E 4. Das bestimmte Integral  $\int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx$  ist gleich dem Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion  $f(x) = x^2 + 1$ , der  $x$ -Achse und den Geraden  $x = -1$  und  $x = 2$  begrenzt wird.

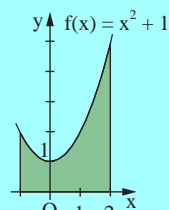


Fig. E 16

b) Das bestimmte Integral  $\int_{0,5}^3 (x - 1,5) dx$  kann nicht als Flächeninhalt gedeutet werden, da nicht für alle  $x \in [0,5; 3]$  die Bedingung  $f(x) \geq 0$  erfüllt ist.

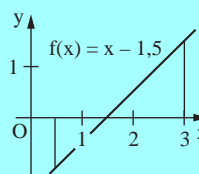


Fig. E 17

E 10

#### Beispiel E 11:

Die Inhalte der markierten Flächen sind mithilfe bestimmter Integrale anzugeben.

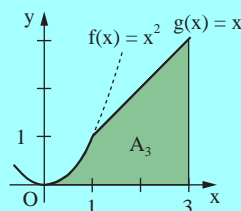
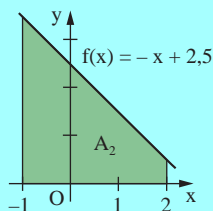
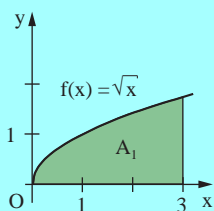


Fig. E 18

Die Funktionen erfüllen die in der Definition geforderten Bedingungen. Also gilt:

$$A_1 = \int_0^3 \sqrt{x} dx$$

$$A_2 = \int_{-1}^2 (-x + 2,5) dx$$

$$A_3 = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 x dx$$

E 11

Es lässt sich nunmehr auch das „Fahrtenschreiberproblem“ (s. S. 143) näherungsweise lösen, indem man den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion  $v(t)$  z. B. durch Auszählen von Einheitsquadraten bestimmt. Die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche ist gleich der Maßzahl des in dem betreffenden Zeitintervall  $[t_1; t_2]$  zurückgelegten Wegs.

Für eine beliebige (stetige) Geschwindigkeit-Zeit-Funktion  $v(t)$  gilt dann  $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ .

Das Berechnen des bestimmten Integrals mittels der o. g. Näherungsmethode ist sehr aufwändig. Es soll deshalb ein einfacherer Weg gesucht werden.

## E 12

Beispiel E 12:

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = x$ . Der Graph der Funktion  $f$ , die  $x$ -Achse und die Geraden  $x = 1$  und  $x = 6$  begrenzen eine Fläche, deren Inhalt berechnet werden soll.

Wir lösen diese Aufgabe

- mittels eines bestimmten Integrals,
- unter Verwendung bekannter Flächeninhaltsformeln,
- mithilfe eines GTA, wobei zunächst die zu berechnende Fläche dargestellt wird.

Zu a)

Für die Funktion  $f(x) = x$  existiert das bestimmte Integral im Intervall  $[1; 6]$ , da  $f$  stetig ist.

Um  $\int_1^6 x dx$  zu berechnen, wenden wir die Definition E 3 an.

- Zerlegen des Intervalls  $[0; 6]$  in  $n$  gleich lange Teilintervalle. Die Teilintervalle haben die Länge  $\Delta x = \frac{6}{n}$  (Fig. E 19).
- Bilden der Summen  $s_n$  und  $S_n$ .

Die untere Intervallgrenze des  $i$ -ten Teilintervalls ist

$$\underline{x}_i = (i-1) \cdot \Delta x = (i-1) \cdot \frac{6}{n}, \text{ die obere } \bar{x}_i = i \cdot \frac{6}{n}.$$

Die zugehörigen Funktionswerte sind

$$f(\underline{x}_i) = (i-1) \cdot \frac{6}{n} \text{ bzw. } f(\bar{x}_i) = i \cdot \frac{6}{n}.$$

Also gilt:

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\underline{x}_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n (i-1) \cdot \frac{6}{n} \cdot \frac{6}{n} = \frac{6^2}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{6}{n} \cdot \frac{6}{n} = \frac{6^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i$$

Wegen  $\sum_{i=1}^k i = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$  („Formeln und Tabellen“, S. 41) folgt:

$$s_n = \frac{6^2}{n^2} \cdot \frac{n^2 - n}{2} = \frac{6^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$S_n = \frac{6^2}{n^2} \cdot \frac{n^2 + n}{2} = \frac{6^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

- Grenzwerte bestimmen**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{6^2}{2} = \frac{36}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{6^2}{2} = \frac{36}{2}$$

$$\text{Damit gilt: } \int_1^6 x dx = \frac{36}{2} = 18$$

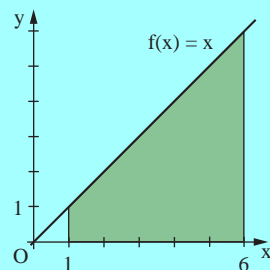


Fig. E 19

In gleicher Weise ergibt sich  $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$ . Also: Flächeninhalt  $A = \int_0^6 x \, dx - \int_0^1 x \, dx = \frac{35}{2}$  (FE).

Zu b)

Die zu berechnende Figur ist ein Trapez. Die Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes lautet  $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$  (a und c sind dabei die parallelen Seiten und h die zugehörige Höhe).

Also gilt:  $A = \frac{6+1}{2} \cdot 5 = \frac{35}{2}$  (FE)

Zu c)

Mit der Eingabe  $\diamond$  (W) (Y=)  $\times$   $\diamond$  (R) (GRAPH) sowie geeigneter WINDOW-Einstellung wird der Graph der Funktion  $f(x) = x$  dargestellt.

Wir setzen fort mit (F5) (7) (1) (Lower Limit) (ENTER) (6) (Upper Limit) (ENTER) und erhalten das nebenstehende Bildschirmbild (Fig E 20).

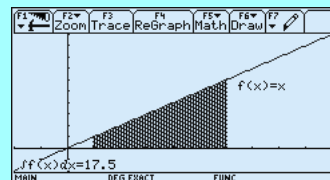


Fig. E 20

Nach der Betrachtung dieser Beispiele wollen wir noch einmal auf die Frage zurückkommen, für welche Funktionen das bestimmte Integral überhaupt existiert.

Nach den Forderungen in Definition E 3 muss die gegebene Funktion  $f$  in jedem abgeschlossenen Teilintervall des Integrationsintervalls einen kleinsten und einen größten Funktionswert besitzen. Erfüllt eine Funktion diese Bedingung, müssen des weiteren die Folgen  $(s_n)$  und  $(S_n)$  gegen ein und denselben Grenzwert konvergieren. Nur dann existiert das bestimmte Integral.

Zwei Eigenschaften, die die Existenz des bestimmten Integrals sichern, sind *Monotonie* und *Stetigkeit* der Integrandenfunktion im jeweiligen Intervall, denn wir wissen bereits, dass für monotone bzw. stetige Funktionen in jedem abgeschlossenen Teilintervall ein kleinster und ein größter Funktionswert existiert. Es lässt sich außerdem jeweils zeigen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  gilt, so dass folgende Sätze formuliert werden können:

#### Satz E 5: Existenz des bestimmten Integrals einer monotonen Funktion

Wenn  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  monotone Funktion ist, so existiert  $\int_a^b f(x) \, dx$ .

E 5

#### Satz E 6: Existenz des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion

Wenn  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion ist, so existiert  $\int_a^b f(x) \, dx$ .

E 6

*Beweis für Satz E 5:*

- Es sei  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  monoton wachsende Funktion. Das Intervall  $[a; b]$  wird in  $n$  gleich lange Teilintervalle zerlegt ( $n \in \mathbb{N}$ , beliebig). Jedes Teilintervall hat dann die Länge  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .  $[x_{i-1}; x_i]$  sei das  $i$ -te Teilintervall dieser Zerlegung.
- Da  $f$  monoton wächst, ist  $f(x_{i-1})$  der kleinste und  $f(x_i)$  der größte Wert der Funktion  $f$  im  $i$ -ten Teilintervall. Wir bilden die Summen

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \Delta x$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x.$$

Da die Folge  $(s_n)$  monoton wächst und die Folge  $(S_n)$  monoton fällt sowie beide beschränkt sind, existieren die Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

- Um nachzuweisen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , muss man zeigen, dass  $(S_n - s_n)$  eine Nullfolge ist.

$$\text{Wegen } S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

$$\text{und } s_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] \text{ gilt } S_n - s_n = \Delta x \cdot [f(x_n) - f(x_0)].$$

$$\text{Da } x_n = b, x_0 = a \text{ und } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ ist, folgt hieraus } S_n - s_n = \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)].$$

- Für  $(b-a) \cdot [f(b) - f(a)]$  kann man die Konstante  $k$  setzen. Somit ist  $S_n - s_n = \frac{k}{n}$ . Da die Folge  $(\frac{k}{n})$  eine Nullfolge ist, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$  bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .

Somit existiert das bestimmte Integral  $\int_a^b f(x) dx$ .

Analog kann gezeigt werden, dass das bestimmte Integral auch für jede im Intervall  $[a; b]$  monoton fallende Funktion existiert. Damit wäre Satz E 5 bewiesen.

Gibt es zu einer Funktion  $f$  das bestimmte Integral über dem Intervall  $[a; b]$ , so heißt diese Funktion über dem Intervall  $[a, b]$  *integrierbar*. *Monotonie* und *Stetigkeit* sind nach den Sätzen E 5 und E 6 also *hinreichende Bedingungen für die Integrierbarkeit* einer Funktion. Sie sind aber *nicht notwendig*, denn es gibt auch Funktionen, die zwar integrierbar, aber nicht monoton (Fig. E 21 b), nicht stetig (Fig. E 21 c) oder weder monoton noch stetig sind (Fig. E 21 d).

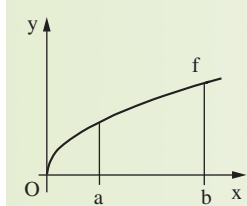


Fig. E 21a

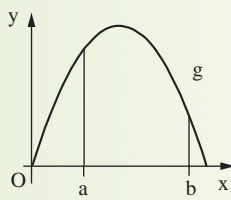


Fig. E 21b

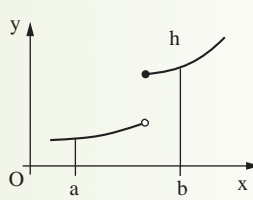


Fig. E 21c

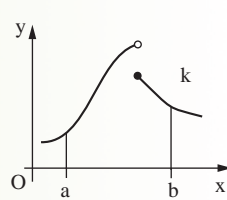


Fig. E 21d

Obige Bedingungen erleichtern die Berechnung des bestimmten Integrals: Liegt eine stetige oder eine monotone Funktion vor, so ist die Existenz des bestimmten Integrals gesichert und es braucht nur der *Grenzwert einer Folge* bestimmt zu werden.

### E 2.3 Begriffserweiterung und Eigenschaften bestimmter Integrale

Wir haben bei der Definition des bestimmten Integrals  $\int_a^b f(x) dx$  vorausgesetzt, dass  $a < b$  ist.

Für manche Anwendungen ist es aber notwendig, den Begriff des bestimmten Integrals auch zur Verfügung zu haben, wenn die obere Integrationsgrenze kleiner als die untere ist oder wenn beide Integrationsgrenzen übereinstimmen:

E 5

**Definition E 5:**

Existiert für die Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$  das bestimmte

Integral  $\int_a^b f(x) dx$ , so wird festgelegt  $\int_a^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$ .

E 6

**Definition E 6:**

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Beispiel E 13:

$$\text{a) } \int_3^0 x^3 dx = - \int_0^3 x^3 dx = -\frac{81}{4} \quad (\text{s. Beispiel E 9})$$

$$\text{b) } \int_5^5 x dx = 0$$

E 13

Aus der Definition des bestimmten Integrals lässt sich eine Eigenschaft folgern, die bei Anwendungen des bestimmten Integrals oft benötigt wird:

**Satz E 7: Additivität des bestimmten Integrals**

Es sei die Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$  integrierbar und  $c$  eine beliebige Zahl aus dem Intervall  $[a; b]$ . Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Diese Eigenschaft nennt man Additivität des bestimmten Integrals.

E 7

Beispiel E 14:

$$\text{a) } \int_0^{0,5} x^3 dx + \int_{0,5}^2 x^3 dx = \int_0^2 x^3 dx = \frac{2^4}{4} = 4$$

$$\text{b) } \int_1^3 (x^2 - 4) dx + \int_3^7 (x - 2)(x + 2) dx + \int_7^1 \left(\frac{x^4 - 4x^2}{x^2}\right) dx = \int_1^7 (x^2 - 4) dx - \int_1^7 (x^2 - 4) dx = 0 \quad (x \neq 0)$$

E 14

**E 2.4 Mittelwertsatz der Integralrechnung**

Wir wissen aus der geometrischen Deutung des bestimmten Integrals  $\int_a^b f(x) dx$  für  $f(x) \geq 0$  im Intervall  $[a; b]$ : Der Inhalt der vom Graphen der Funktion  $f$ , der  $x$ -Achse und den Geraden  $x = a$  und  $x = b$  begrenzten Fläche (der dem bestimmten Integral entspricht) liegt *zwischen den Flächeninhalten zweier Rechtecke*. Die eine Seite der beiden Rechtecke hat jeweils die Länge  $b - a$ , die andere Seite ist durch die untere bzw. die obere Schranke der Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$  bestimmt. Nun entsteht die Frage, ob unter Beibehaltung der gestellten Bedingungen *ein einziges Rechteck* über dem Intervall  $[a; b]$  gefunden werden kann, dessen Flächeninhalt gleich dem Integral  $\int_a^b f(x) dx$  ist.

Es sei  $f$  eine stetige Funktion mit  $f(x) \geq 0$  im Intervall  $[a; b]$ .

Die markierte Figur hat den Flächeninhalt  $\int_a^b f(x) dx$  (Fig. E 22).

Betrachtet man diese Figur, so kann man vermuten: Es lässt sich eine Stelle  $x_0$  so finden, dass das Rechteck über dem Intervall  $[a; b]$  und der Ordinate  $f(x_0)$  als zweiter Seite flächengleich mit der markierten Figur ist.

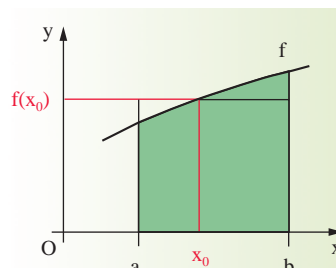


Fig. E 22

Der Flächeninhalt des Rechtecks ist dann  $A = f(x_0) \cdot (b - a)$ . Die Zahl  $f(x_0)$  heißt *Integralmittelwert*. In Fig. E 22 ist dieser Sachverhalt für eine Funktion  $f$  dargestellt, die im Intervall  $[a; b]$  nur positive Funktionswerte annimmt. Es kann jedoch allgemein formuliert werden:

E 8

**Satz E 8: Mittelwertsatz der Integralrechnung**

Ist  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion, dann gibt es mindestens eine Zahl  $x_0$  mit

$$a < x_0 < b, \text{ für deren Funktionswert } f(x_0) \text{ gilt } \int_a^b f(x) dx = f(x_0) \cdot (b - a).$$

*Beweis:*

- Ist  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  integrierbare Funktion, so besitzt  $f$  in  $[a; b]$  eine untere Grenze  $m$  und eine obere Grenze  $M$ . Ist  $f$  im Intervall  $[a; b]$  sogar stetig, dann ist  $m$  das Minimum und  $M$  das Maximum von  $f$  in  $[a; b]$ .

- Es gilt dann  $m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$ .

Somit gibt es eine reelle Zahl  $\mu$  mit  $m \leq \mu \leq M$ , so dass gilt  $\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a)$ .

- Nach dem Zwischenwertsatz existiert dann für über dem Intervall  $[a; b]$  stetige Funktionen  $f$  eine Stelle  $x_0 \in [a; b]$  mit  $f(x_0) = \mu$ , woraus folgt:  $\int_a^b f(x) dx = f(x_0) \cdot (b - a)$ .

Die Zahl  $f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  wird auch „*Mittelwert der Funktion  $f$  über dem Intervall  $[a; b]$* “ genannt.

E 15

**Beispiel E 15:**

- a) Gesucht ist die Zahl  $x_0$  aus dem Intervall  $[a; b]$ , für die  $\int_a^b 2x dx = f(x_0) \cdot (b - a)$  ist.

Wir berechnen das bestimmte Integral:  $\int_a^b 2x dx = b^2 - a^2$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt

$$b^2 - a^2 = f(x_0) \cdot (b - a), \text{ woraus } (b - a) \cdot (b + a) = f(x_0) \cdot (b - a),$$

also (da  $b \neq a$ )  $(b + a) = f(x_0)$  folgt.

Wegen  $f(x) = 2x$  gilt  $f(x_0) = 2x_0$ , also  $2x_0 = b + a$

und damit  $x_0 = \frac{b+a}{2}$ .

Geometrisch gedeutet heißt das: Da  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  der Mittelwert von  $a$  und  $b$  ist, stellt  $f(x_0)$  die Länge der Mittelparallelen des Trapezes in Fig. E 23 dar.

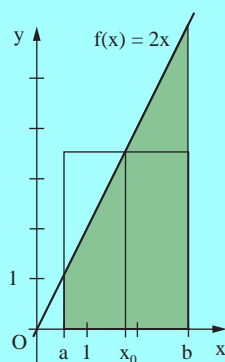


Fig. E 23

- b) Für die Funktion  $f(x) = x^2$  sind im Intervall  $[0; 4]$  der Mittelwert  $f(x_0)$  und das zugehörige Argument  $x_0$  zu berechnen.

Nach Satz E 8 gilt  $\int_0^4 x^2 dx = f(x_0) \cdot 4$ , woraus wegen  $\int_0^4 x^2 dx = \frac{4^3}{3}$  (s. S. 148) folgt

$$\frac{64}{3} = f(x_0) \cdot 4.$$

Damit ergibt sich:  $f(x_0) = \frac{16}{3}$ , also  $x_0 = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2,31$ .

## E 3 Beziehung zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral

### E 3.1 Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze

Die Berechnung bestimmter Integrale mithilfe der Folgen  $(s_n)$  und  $(S_n)$  ist sehr aufwändig, wie wir bereits bei den Beispielen in den Abschnitten E 2.1 und E 2.2 gesehen haben. Wir wollen deshalb in diesem Abschnitt dafür eine wesentlich einfachere und rationellere Möglichkeit kennen lernen. Bekanntlich hängt der Wert eines bestimmten Integrals nur von den Integrationsgrenzen und der Integrandenfunktion ab (s. S. 150). Untersuchungen am bestimmten Integral könnten sich also auf diese Teile konzentrieren. Wir beschränken uns hier auf die Untersuchung des Einflusses von Veränderungen der Integrationsgrenzen.

Im Abschnitt E 2.1 wurde für  $\int_0^b x^2 dx$  der Wert bestimmt. Lässt man nun die untere Grenze 0 fest und verändert die obere Grenze  $b$ , so erhält man für jede Zahl  $b$  ( $b \geq 0$ ) eine eindeutig bestimmte Zahl  $\int_0^b x^2 dx$ . Beispielsweise also:

$b$	0	1	2	4	100	0,5
$\int_0^b x^2 dx$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{64}{3}$	$\frac{10^6}{3}$	$\frac{1}{24}$

Es entsteht eine Menge geordneter Paare  $(b; \int_0^b x^2 dx)$ , die wegen der Eindeutigkeit von  $\int_0^b x^2 dx$  eine

Funktion  $\Phi(b)$  ist. Man kann also schreiben:  $\Phi(b) = \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$ . Das bestimmte Integral ist demnach von der oberen Grenze abhängig – es ist eine *Funktion der oberen Integrationsgrenze*.

Da es üblich ist, das Argument einer Funktion mit  $x$  (statt hier mit  $b$ ) zu bezeichnen, wählen wir für die Integrationsvariable eine andere Bezeichnung, z. B.  $t$  (statt  $x$ ), und erhalten

$$\Phi(x) = \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} \quad \text{mit } x \geq 0.$$

Definition E 7:

Gegeben sei eine Funktion  $f$ . Die Funktion  $\Phi$ , die jedem  $x$  den Wert des Integrals  $\int_a^x f(t) dt$  zuordnet, heißt **Integralfunktion** von  $f$  mit der unteren Grenze  $a$ . Der Definitionsbereich der Integralfunktion ist die Menge aller  $x$ , für die das Integral  $\int_a^x f(t) dt$  existiert.

E 7

Wir beachten den Unterschied zwischen den Begriffen *Integralfunktion* und *Integrandenfunktion*:  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  ist die Integralfunktion,  $f(t)$  die Integrandenfunktion (kurz: der Integrand). Betrachten wir im obigen Beispiel Integralfunktion und Integrandenfunktion, so stellen wir fest: Bildet man die Ableitung der Integralfunktion, so erhält man den Integranden. Die Integralfunktion  $\Phi$  ist also eine Stammfunktion des Integranden  $f$ . Dieser Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral und der Stammfunktion gilt für beliebige stetige Funktionen.

**E 9****Satz E 9:**

Für eine im Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion  $f$  ist die Funktion  $\Phi$  mit  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  eine Stammfunktion von  $f$  im Intervall  $[a; b]$ .

Da die Menge aller Stammfunktionen einer gegebenen Funktion  $f$  das unbestimmte Integral dieser Funktion ist, stellt Satz E 9 einen Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral her.

*Beweis:*

- Es seien  $f$  eine beliebige, im Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion und  $\Phi$  die Funktion mit

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

- Wenn wir zeigen wollen, dass  $\Phi$  eine Stammfunktion von  $f$  ist, so müssen wir nachweisen, dass  $\Phi'(x) = f(x)$  für alle  $x \in [a; b]$  gilt. Wir bilden dazu zunächst den **Differenzenquotienten** von  $\Phi$ :

Für  $h \neq 0$  und  $(x+h) \in [a; b]$  ist  $\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$ . Daraus folgt wegen

$$\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt = \int_a^{x+h} f(t) dt \quad (\text{Satz E 7}), \text{ also } \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt:$$

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

- Wir schätzen den **Differenzenquotienten** nach oben ab (Fall  $h > 0$ ):

Da  $f$  eine stetige Funktion ist, existieren im Intervall  $[x; x+h]$  ein kleinster Funktionswert  $f(\underline{x})$  und ein größter Funktionswert  $f(\bar{x})$ . Nach der Definition des bestimmten Integrals gilt dann

$$f(\underline{x}) \cdot h \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(\bar{x}) \cdot h, \text{ also } f(\underline{x}) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(\bar{x}). \quad (*)$$

- Wir berechnen den **Grenzwert des Differenzenquotienten** für  $h \rightarrow 0$ :

$$\text{Aus der Ungleichung } (*) \text{ folgt } \lim_{h \rightarrow 0} f(\underline{x}) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq \lim_{h \rightarrow 0} f(\bar{x}). \quad (**)$$

Da  $f$  stetig ist, gilt  $\lim_{h \rightarrow 0} f(\underline{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\bar{x}) = f(x)$ .

$$\text{Somit ergibt sich aus der Ungleichung } (**): \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x).$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man für den Fall  $h < 0$ .

Damit haben wir gezeigt:  $\Phi'(x) = f(x)$  w. z. b. w.

### E 3.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Nach Satz E 9 ist die Funktion  $\Phi$  mit  $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$  eine Stammfunktion von  $f$  im Intervall  $[a; b]$ .

F sei eine beliebige Stammfunktion zu  $f$ . Dann gilt nach Satz E 1

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad \text{bzw.} \quad \int_a^x f(t) dt = F(x) + C.$$

Für  $x = a$  erhält man aus dieser Gleichung  $\int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C$  und somit  $C = -F(a)$ .

Für  $x = b$  folgt  $\int_a^b f(t) dt = F(b) + C$ . Ersetzt man in dieser Gleichung  $C$ , dann ergibt sich

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Bei Umbenennung der Integrationsvariablen erhalten wir schließlich  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .  
Mit diesen Überlegungen haben wir den folgenden Satz bewiesen:

**Satz E 10: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**

Ist  $f$  eine im Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion und  $F$  eine zu  $f$  gehörende Stammfunktion, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

E 10

Dieser Satz, der den Zusammenhang zwischen der Differentialrechnung und der Integralrechnung herstellt, wird in manchen Büchern nach den beiden Begründern der Infinitesimalrechnung auch als Formel nach NEWTON – LEIBNIZ bezeichnet. Das bestimmte Integral  $\int_a^b f(x) dx$  wurde dabei durch die Grenzwerte gewisser Zahlenfolgen definiert, zum unbestimmten Integral (Aufsuchen von Stammfunktionen) gelangten wir über die Umkehrung der Differentiation. Obiger Hauptsatz verbindet also zwei Sachverhalte miteinander, denen völlig unterschiedliche Probleme zugrunde liegen. Es ist das Verdienst von Isaac NEWTON und Gottfried Wilhelm LEIBNIZ, diesen Zusammenhang erstmals erkannt und angewendet zu haben.

Die beiden Sätze E 9 und E 10 stehen in unmittelbarem Zusammenhang. Während der Satz E 9 die Existenz einer Stammfunktion  $F$  zu einer stetigen Funktion  $f$  sichert, ermöglicht der Hauptsatz die Berechnung bestimmter Integrale mithilfe der Stammfunktion. Mit ihm haben wir einen Weg gefunden, bestimmte Integrale effektiver zu berechnen.

## E 4 Berechnen bestimmter Integrale; Anwendung zum Ermitteln von Flächeninhalten

### E 4.1 Berechnen bestimmter Integrale

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verläuft die Berechnung des bestimmten Integrals  $\int_a^b f(x) dx$  in folgenden Schritten:

- (1) Wir ermitteln das unbestimmte Integral  $\int f(x) dx$ , bestimmen also eine Stammfunktion  $F$  zu  $f$ .
- (2) Wir setzen die obere und die untere Integrationsgrenze für  $x$  in diese Stammfunktion ein, d. h., wir bilden  $F(b)$  und  $F(a)$ .
- (3) Wir berechnen die Differenz  $F(b) - F(a)$ .

Man schreibt  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ .

## E 16

Beispiel E 16:

Das bestimmte Integral  $\int_1^5 x^3 dx$  ist zu berechnen.

(1)  $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$  (Es könnte auch jede beliebige andere Stammfunktion von  $f(x) = x^3$  verwendet werden, z. B.  $\frac{x^4}{4} + 5$  oder  $\frac{x^4}{4} - 1$ . Wir wollen jedoch die „einfachste“ nutzen.)

$$(2) F(b) = F(5) = \frac{5^4}{4} = \frac{625}{4}; \quad F(a) = F(1) = \frac{1^4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$(3) F(b) - F(a) = \frac{625}{4} - \frac{1}{4} = 156.$$

Wir schreiben den Lösungsweg kürzer

$$\int_1^5 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_1^5 = \frac{625}{4} - \frac{1}{4} = 156.$$

Ein Vergleich mit der Berechnung des bestimmten Integrals  $\int_0^3 x^3 dx$  (Beispiel E 9) im Abschnitt E 2.2 macht deutlich, dass die Verwendung des Hauptsatzes eine wesentliche Vereinfachung ermöglicht. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und den Regeln für unbestimmte Integrale (Satz E 4) lassen sich auch für bestimmte Integrale folgende Regeln folgern:

## E 11

Satz E 11:

Sind  $f$  und  $g$  in  $[a; b]$  stetige Funktionen, so gilt:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

**Faktorregel 2**

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

**Summenregel 2**

Der Beweis zu diesem Satz soll hier nicht ausgeführt werden.

Die folgende Übersicht stellt noch einmal die uns bisher bekannten Definitionen und Sätze zusammen, die wir bei der Berechnung bestimmter Integrale anwenden können:

Es seien  $f$  und  $g$  in  $[a; b]$  stetige Funktionen. Dann gilt:

- $\int_a^a f(x) dx = 0$  *Übereinstimmung der Integrationsgrenzen*
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$  *Vertauschung der Integrationsgrenzen*
- $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$  *Intervalladditivität*
- $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$  *Faktorregel*
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$  *Summenregel*

Unter Verwendung dieser Übersicht und der Zusammenstellung einiger Grundintegrale aus Abschnitt E 1.2 lassen sich weitere bestimmte Integrale berechnen.

### Beispiel E 17:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_1^3 (-x^2 + 4x + \sqrt{x}) dx &= \left[ -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \right]_1^3 = \left( -\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 + \frac{2}{3}\sqrt{3^3} \right) - \left( -\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 + \frac{2}{3}\sqrt{1^3} \right) \\ &\approx -9 + 18 + 3,46 - \left( -\frac{1}{3} + 2 + \frac{2}{3} \right) \approx 12,46 - 2,33 = 10,13 \\ \text{b) } \int_0^2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx &= \left[ x - 2\sqrt{x} \right]_0^2 = (2 - 2\sqrt{2}) - (0 - 2\sqrt{0}) \approx -0,83 \end{aligned}$$

E 17

### Beispiel E 18:

Durch Einsatz eines GTA ist es möglich, auch kompliziertere bestimmte Integrale (zumindest näherungsweise) zu berechnen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_2^5 \left( \sqrt{x^3 + 4} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right) dx &= \quad \text{b) } \int_1^4 \frac{(2x-3) \cdot 4}{\sqrt{4x+4}} dx = \\ \text{c) } \int_1^2 \frac{2x^3 - 4}{5x^2 + 5x} dx &= \end{aligned}$$

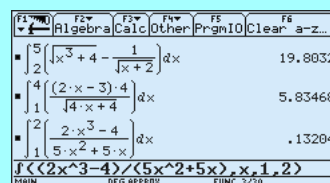


Fig. E 24

E 18

## E 4.2 Ermitteln von Flächeninhalten

Aus der geometrischen Deutung des bestimmten Integrals (Definition E 4) resultiert die Flächeninhaltsberechnung als grundlegende Anwendung des Rechnens mit bestimmten Integralen. Dabei erfordern Unterschiede in Form und Lage der jeweiligen Flächen im Koordinatensystem auch spezifische Vorgehensweisen, die nachfolgend systematisch betrachtet werden sollen.

### • Flächen unter Funktionsgraphen, die oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegen

Wir haben bereits festgestellt, dass für eine stetige nichtnegative Funktion  $f$  das bestimmte Integral über dem Intervall  $[a; b]$  gleich der Maßzahl des Inhalts der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion  $f$ , der x-Achse sowie den Geraden  $x = a$  und  $x = b$  (kürzer: zwischen dem Graphen der Funktion

$f$  und der x-Achse im Intervall  $[a; b]$ ) ist:  $A = \int_a^b f(x) dx$ .

Wir wollen nun die Frage klären, wie der Flächeninhalt berechnet werden kann, wenn die Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$  nicht positiv ist, d. h., wenn die zu berechnende Fläche unterhalb der x-Achse liegt. Es sei also  $f$  eine stetige nichtpositive Funktion im Intervall  $[a; b]$  (Fig. E 25). Der Graph dieser Funktion begrenzt ebenfalls zusammen mit der x-Achse sowie den Geraden  $x = a$  und  $x = b$  eine Fläche.

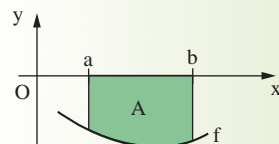


Fig. E 25

Bilden wir die Funktion  $-f$ , so ist diese im Intervall  $[a; b]$  positiv. Das bestimmte Integral  $\int_a^b [-f(x)] dx$

stellt dann den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion  $-f$  und der  $x$ -Achse im Intervall  $[a; b]$  dar. Diese Fläche ist flächengleich der in Fig. E 25 dargestellten Fläche – die Flächen liegen symmetrisch zur  $x$ -Achse.

Nach der Faktorregel für bestimmte Integrale folgt  $\int_a^b [-f(x)] dx = -\int_a^b f(x) dx$ , d. h., das bestimmte Integral von  $f$  und das bestimmte Integral von  $-f$  unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Um aber stets positive Maßzahlen für den Flächeninhalt zu erhalten, schreiben wir  $A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$ .

## E 19

Beispiel E 19:

- a) Es ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion  $f(x) = (x-3)^2 - 4$  und der  $x$ -Achse im Intervall  $[2; 4]$  zu berechnen (Fig. E 26).

Die Fläche liegt unterhalb der  $x$ -Achse – wir müssen den Betrag des entsprechenden bestimmten Integrals berechnen.

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_2^4 [(x-3)^2 - 4] dx \right| = \left| \int_2^4 (x^2 - 6x + 5) dx \right| \\ &= \left| \left[ \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right]_2^4 \right| = \left| \left( \frac{64}{3} - 48 + 20 \right) - \left( \frac{8}{3} - 12 + 10 \right) \right| = \left| -\frac{22}{3} \right| \approx 7,3 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 7,3 FE.

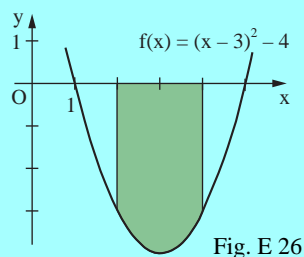


Fig. E 26

- b) Es ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion  $f(x) = x^2 + 2x$  und der  $x$ -Achse in den Grenzen  $-1$  und  $1$  zu berechnen (Fig. E 27).

Die Funktion  $f$  hat im Intervall  $[-1; 1]$  eine Nullstelle. Der Graph der Funktion  $f$  schneidet in diesem Intervall also die  $x$ -Achse – die gesuchte Fläche liegt sowohl unterhalb als auch oberhalb der  $x$ -Achse. Aus diesem Grunde wäre es hier falsch, über das gesamte Intervall zu integrieren – man erhielte dann nämlich als Resultat die Summe aus einem „positiven“ und einem „negativen“ Flächeninhalt. Die beiden Teilflächen müssen in einem solchen Fall einzeln berechnet werden.

$$A = \left| \int_{-1}^0 (x^2 + 2x) dx \right| + \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \left| \left[ \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^0 \right| + \left[ \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = \left| -\frac{2}{3} \right| + \frac{4}{3} = 2$$

Der Flächeninhalt beträgt 2 FE.

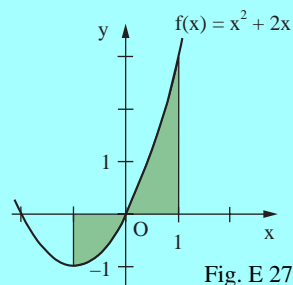


Fig. E 27

- c) Durch den Graphen der Funktion  $f(x) = x^2 - 7x + 10$  und die  $x$ -Achse wird eine Fläche vollständig begrenzt (Fig. E 28).

Der Inhalt dieser Fläche ist zu berechnen.

- Um die Integrationsgrenzen zu ermitteln, zwischen denen das bestimmte Integral zu berechnen ist, müssen die Nullstellen der Funktion  $f$  bestimmt werden. Aus  $f(x) = 0 = x^2 - 7x + 10$  erhält man hierfür  $x_1 = 5$  und  $x_2 = 2$ .

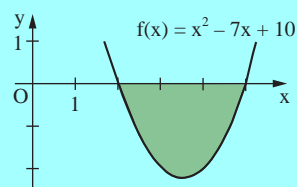


Fig. E 28

- Flächenberechnung:

$$A = \left| \int_2^5 (x^2 - 7x + 10) dx \right| = \left| \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 10x \right]_2^5 \right|$$

$$= \left| \left( \frac{125}{3} - \frac{175}{2} + 50 \right) - \left( \frac{8}{3} - \frac{28}{2} + 20 \right) \right| = |-4,5| = 4,5$$

Der Flächeninhalt beträgt 4,5 FE.

- d) Es ist der Inhalt der Fläche zu bestimmen, die der Graph der Funktion  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$  und die x-Achse vollständig begrenzen (Fig. E 29).

- Bestimmen der Integrationsgrenzen (Nullstellen):

$$f(x) = 0 = x^4 - 5x^2 + 4$$

Durch Substitution  $x^2 = z$  und Lösen der quadratischen Gleichung erhalten wir  $x_{1/2} = \pm 2$  und  $x_{3/4} = \pm 1$ .

- Flächenberechnung:

Der Skizze kann man entnehmen, dass sich die Gesamtfläche aus drei Teilflächen zusammensetzt:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

Wir berechnen die Teilflächen.

$$A_1 = \left| \int_{-2}^{-1} (x^4 - 5x^2 + 4) dx \right| = \left| \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x \right]_{-2}^{-1} \right| \approx |-1,47| = 1,47$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx = \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x \right]_{-1}^1 \approx 5,07; \quad A_3 = A_1 \approx 1,47 \text{ (wegen Symmetrie)}$$

$$A \approx 1,47 + 5,07 + 1,47 = 8,01$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 8 FE.

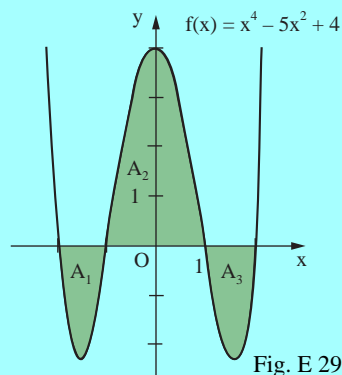


Fig. E 29

Die Beispiele zeigen: Bei der Berechnung des Inhalts von Flächen, die von Graphen stetiger Funktionen und der x-Achse vollständig oder in gegebenen Grenzen eingeschlossen werden, sind zunächst die Nullstellen dieser Funktion zu berechnen, um dann entscheiden zu können, welche Lage die Flächen beziehungsweise die Teilflächen bezüglich der x-Achse haben. Liegen Nullstellen im Intervall, so erfolgt ein Lagewechsel der Flächenstücke hinsichtlich der x-Achse und die Gesamtfläche muss „stückweise“ berechnet werden.

Beispiel E 20:

Der Graph der Funktion  $f(x) = 0,5 (x^3 - 6x^2 + 9x - 1)$  und die x-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Der Inhalt dieser Fläche ist unter Verwendung eines GTA zu ermitteln.

[Zur Berechnung von Flächeninhalten](#) mit dem GTA kann man wie im Beispiel E 19 vorgehen:

- (1) Funktion zeichnen.
- (2) Nullstellen ermitteln.
- (3) Inhalt der Flächenstücke zwischen je zwei Nullstellen berechnen.
- (4) Beträge der Flächeninhalte addieren.

Fig. E 30 gibt einen mittels der Zero-Funktion ermittelten Näherungswert für die erste Nullstelle an:  $x_1 \approx 0,1206$ . Analog erhält man  $x_2 \approx 2,3473$  und  $x_3 \approx 3,5321$ . Daraus lassen sich die Inhalte der Teilflächen  $A_1 \approx 2,114$  (FE) bzw.  $A_2 \approx |-0,391|$  (FE) und somit  $A \approx 2,5$  (FE) ermitteln.

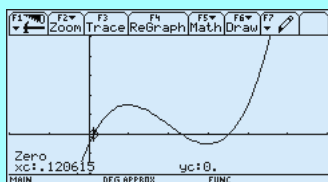


Fig. E 30

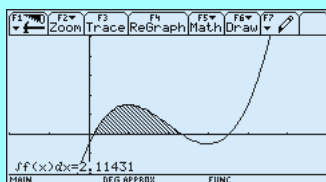


Fig. E 31

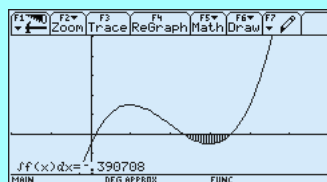


Fig. E 32

Natürlich hätte man auch analog zu Beispiel E 19 d) vorgehen und dazu eingeben können:

$$A \approx \int_{0,1206}^{2,3473} (0,5(x^3 - 6x^2 + 9x - 1))dx + \left| \int_{2,3473}^{3,5321} (0,5(x^3 - 6x^2 + 9x - 1))dx \right|$$

Fig. E 33 gibt in der obersten Zeile die Berechnung des ersten Integrals und in der zweiten Zeile die des zweiten Integrals (jeweils einschließlich der Gesamtlösung) aus obigem Ausdruck für A an.

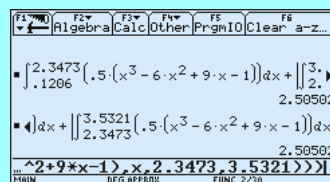


Fig. E 33

- *Flächen, die zwischen zwei Funktionsgraphen liegen*

E 21

Beispiel E 21:

Die Graphen der Funktionen  $f(x) = (x - 4)^2 + 1$  und  $g(x) = -x + 7$  schließen ein Flächenstück ein. Der Inhalt dieser Fläche soll ermittelt werden.

- Bestimmen der Integrationsgrenzen:  
Die Integrationsgrenzen ergeben sich hier aus den Schnittpunkten der Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  (Fig. E 34). Die Abszissen der Schnittpunkte sind die Integrationsgrenzen. Wir bestimmen die Abszissen:  
 $f(x) = g(x)$ , also  $(x - 4)^2 + 1 = -x + 7$ .  
Daraus folgt:  
 $x^2 - 8x + 17 = -x + 7$  bzw.  $x^2 - 7x + 10 = 0$ .  
Diese Gleichung hat die Lösungen  
 $x_1 = 2$  und  $x_2 = 5$ .

- Ermitteln des Flächeninhaltes:  
Der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  ist die Differenz der Inhalte der Flächen unter den Graphen der Funktion  $g$  bzw.  $f$ . Also:

$$A = \int_2^5 (-x + 7) dx - \int_2^5 ((x - 4)^2 + 1) dx = \int_2^5 [(-x + 7) - ((x - 4)^2 + 1)] dx \quad (\text{nach Satz E 4})$$

und damit

$$A = \int_2^5 (-x^2 + 7x - 10) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}x^2 - 10x \right]_2^5 = \frac{9}{2}.$$

Die Fläche zwischen den beiden Graphen hat einen Inhalt von 4,5 FE.

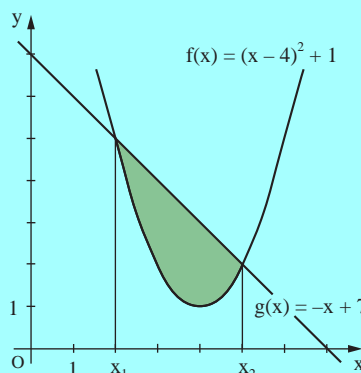


Fig. E 34

Diese Vorgehensweise zur Berechnung des Inhaltes der Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen soll nun verallgemeinert werden:

Es seien  $f$  und  $g$  zwei stetige und im Intervall  $[x_1; x_2]$  nichtnegative Funktionen mit  $f(x) > g(x)$  für alle  $x$  zwischen  $x_1$  und  $x_2$  sowie  $f(x_1) \geq g(x_1)$ ,  $f(x_2) \geq g(x_2)$  (Fig. E 35 a/b).

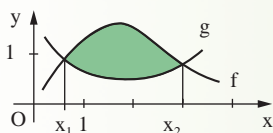


Fig. E 35a

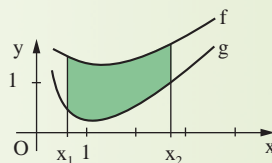


Fig. E 35b

Dann gilt für die Inhaltsmaßzahl der von den Graphen beider Funktionen im Intervall  $[x_1; x_2]$  eingeschlossenen Fläche  $A = A_1 - A_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx$ .

Dieser Weg der Berechnung von Flächenstücken zwischen Funktionsgraphen ist unabhängig von der Lage des Flächenstückes bezüglich der x-Achse, wie sie in den Fig. E 36a–c dargestellt sind.

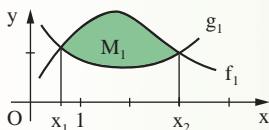


Fig. E 36a

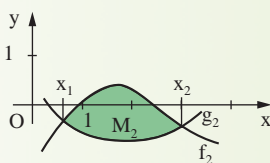


Fig. E 36b

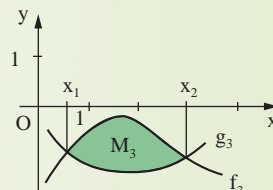


Fig. E 36c

Liegt die Fläche teilweise oder vollständig unterhalb der x-Achse, kann durch eine Verschiebung in Richtung der y-Achse die Fläche  $M_2$  oder  $M_3$  mit  $M_1$  zur Deckung gebracht werden. Diese Verschiebung lässt die Schnittpunktsabszissen (Integrationsgrenzen)  $x_1$  und  $x_2$  unverändert. Die Gleichungen der Funktionen  $g_i$  unterscheiden sich untereinander um denselben konstanten Summanden wie die der entsprechenden Funktionen  $f_i$ . Dieser Summand hebt sich dann bei der Differenzbildung im Integranden auf. Deshalb gilt:

$$\int_{x_1}^{x_2} [f_1(x) - g_1(x)] dx = \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x) - g_2(x)] dx = \int_{x_1}^{x_2} [f_3(x) - g_3(x)] dx$$

Auf die o. g. Voraussetzung bezüglich der Größe der Funktionswerte von  $f$  und  $g$  bzw. der gegenseitigen Lage ihrer Graphen kann man verzichten, wenn mit dem Betrag des Differenzintegrals gearbeitet wird:

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)] dx \right|$$

#### Beispiel E 22:

Es ist der **Inhalt der Fläche zwischen den Graphen** der nachfolgend angegebenen Funktionen  $f$  und  $g$  zu berechnen.

a)  $f(x) = 0,5x^2 - 1$  und  $g(x) = -(x - 1)^2 + 2$  (Fig. E 37)

- Integrationsgrenzen (Abszissen der Graphenschnittpunkte):

$$f(x) = g(x), \text{ also } 0,5x^2 - 1 = -(x - 1)^2 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} = 0, \text{ also } x_1 = -\frac{2}{3} \text{ und } x_2 = 2$$

- Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_{-\frac{2}{3}}^2 [f(x) - g(x)] dx \right| \\
 A &= \left| \int_{-\frac{2}{3}}^2 [0,5x^2 - 1 - (-(x-1)^2 + 2)] dx \right| \\
 &= \left| \int_{-\frac{2}{3}}^2 \left( \frac{3}{2}x^2 - 2x - 2 \right) dx \right| = \left| \left[ \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 2x \right]_{-\frac{2}{3}}^2 \right| \\
 &= \left| (4 - 4 - 4) - \left( -\frac{4}{27} - \frac{4}{9} + \frac{4}{3} \right) \right| = \frac{128}{27}
 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 4,74 FE.

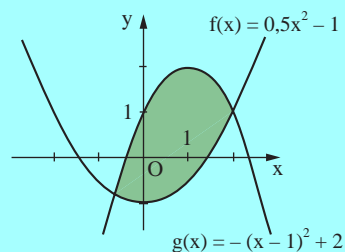


Fig. E 37

- b)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x$  und  $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$  (Fig. E 38)

- Integrationsgrenzen:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x), \text{ also } \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x \\
 &\Rightarrow x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = 0 \\
 &\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -2 \text{ und } x_3 = 3
 \end{aligned}$$

Wir sehen also: Die Graphen der beiden Funktionen schneiden einander in mehreren Punkten. Es entstehen zwischen den Graphen mehrere Teilflächen, die einzeln zu berechnen sind.

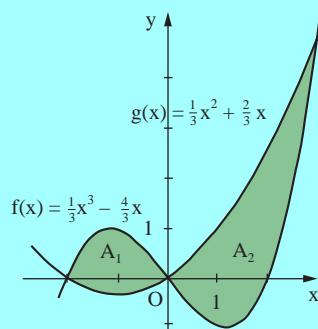


Fig. E 38

- Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2, \text{ also } A = \int_{-2}^0 [f(x) - g(x)] dx + \left| \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx \right| \\
 A_1 &= \int_{-2}^0 \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x \right) dx & A_2 &= \left| \int_0^3 \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x \right) dx \right| \\
 A_1 &= \int_{-2}^0 \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 2x \right) dx & A_2 &= \left| \int_0^3 \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 2x \right) dx \right| \\
 &= \left[ \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{9}x^3 - x^2 \right]_{-2}^0 & &= \left| \left[ \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{9}x^3 - x^2 \right]_0^3 \right| \\
 &= (0 - (\frac{16}{12} + \frac{8}{9} - 4)) = \frac{16}{9} & &= \left| (\frac{81}{12} - \frac{27}{9} - 9) - 0 \right| = \left| -\frac{21}{4} \right| = \frac{21}{4} \\
 A &= \frac{16}{9} + \frac{21}{4} = \frac{253}{36}
 \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 7 FE.

- c)  $f(x) = \sqrt{2x+1}$  und  $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

- Integrationsgrenzen:

Der GTA gibt als Schnittpunktsabszissen an:  $x_1 \approx 0,6063$  (Fig. E 39),  $x_2 \approx 2,062$

- Flächeninhalt:

Der Inhalt der Fläche, die im Grafikbildschirm mittels  $\boxed{F5}$  (Math)  $\boxed{C}$  (Shade) schraffiert wurde (Fig. E 40), beträgt  $A \approx 1,07$  (FE) (Fig. E 41).

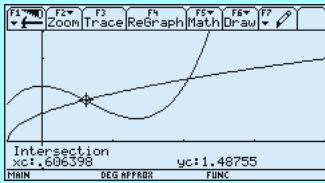


Fig. E 39

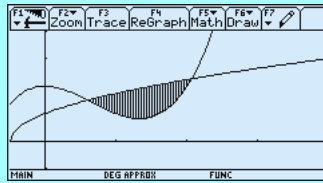


Fig. E 40

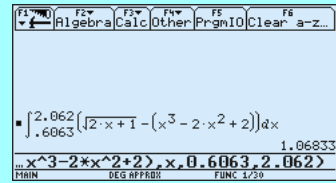


Fig. E 41

**Beispiel E 23:**

Die auf S. 135 dargestellte Montagehalle kann als zusammengesetzter Körper aufgefasst werden, der – wie aus nebenstehender Skizze ersichtlich – näherungsweise aus

- (1) einem quaderförmigen Sockel (Volumen  $V_1$ ),
- (2) zwei Viertelskugeln an den Stirnseiten (Volumen jeweils  $V_2$ ) und
- (3) dem eigentlichen Hallenkörper (Volumen  $V_3$ ) besteht.

Zu (1): Es gilt  $V_1 = 8 \text{ m} \cdot 210 \text{ m} \cdot 150 \text{ m} = 252\,000 \text{ m}^3$

Zu (2): Die Annahme, dass es sich bei den Körpern an den Stirnseiten näherungsweise um Viertelskugeln handelt, ist nur wegen  $\frac{210 \text{ m}}{2} \approx 107 \text{ m}$  sinnvoll. Wegen  $\frac{210 \text{ m}}{2} = 105 \text{ m}$  und der Hallenhöhe von  $h = 107 \text{ m}$  wählen wir als Näherungswert für den Kugelradius  $r_1 = 106 \text{ m}$ . Dann gilt:  $V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot 106^3 \text{ m}^3 \approx 2\,494\,000 \text{ m}^3$ .

Zu (3): Aus dem gleichen Grunde wie unter (2) könnte man den Hallenkörper als Halbzylinder mit einem Radius  $(107 \text{ m} - 8 \text{ m}) = 99 \text{ m} < r_2 < 105 \text{ m}$ , also z. B.  $r_2 = 102 \text{ m}$ , und der Höhe  $H = 150 \text{ m}$  auffassen. Dann ergäbe sich:  $V_3 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 102^2 \cdot 150 \text{ m}^3 \approx 2\,451\,000 \text{ m}^3$ .

Freilich handelt es sich dabei nur um eine sehr grobe Näherung. Günstiger ist es, den Hallenkörper als einen „parabolischen Zylinder“ anzusehen, der die Grundfläche  $A_G$  und die Höhe  $H$  besitzt. Fasst man die begrenzende Kurve von  $A_G$  als Parabel auf, so hat diese bei Einordnung in ein Koordinatensystem wie in Fig. E 42 (Scheitelpunkt  $(0; 99)$ ,  $P_{1/2}(\pm 105; 0)$ ) die Gleichung  $y = f(x) = -\frac{99}{105^2} x^2 + 99$ . Dann gilt:

$$V_3^* = H \cdot A_G = 150 \cdot \int_{-105}^{105} \left( -\frac{99}{105^2} x^2 + 99 \right) dx \approx 2\,079\,000 \text{ m}^3 \quad (\text{Fig E 43})$$

Damit ergäbe sich als Gesamtvolumen  $V \approx 4\,825\,000 \text{ m}^3$ .

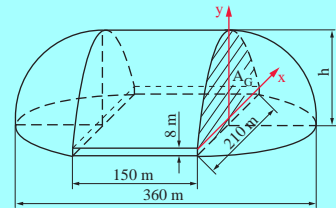


Fig. E 42

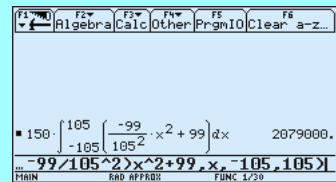


Fig. E 43

## E 5 Weitere Integrationsmethoden

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ermöglicht es, bestimmte Integrale mithilfe unbestimmter Integrale (Stammfunktionen) zu berechnen. Die uns bisher bekannten Grundintegrale und die Regeln für das Arbeiten mit bestimmten Integralen lassen jedoch nur die Berechnung für relativ wenige Funktionen zu – es sei denn, man setzt das Computeralgebrasystem eines GTA oder eines Computers ein. In diesem Abschnitt sollen deshalb Verfahren erarbeitet werden, welche das Berechnen weiterer Arten bestimmter Integrale auch ohne diese elektronischen Hilfsmittel erlauben.

### E 5.1 Integration durch lineare Substitution

In den vorangegangenen Überlegungen zur Integralrechnung wurde häufig auf Sätze und Regeln der Differentialrechnung zurückgegriffen. So liegt der Gedanke nahe, weitere Integrationsmethoden aus bekannten Regeln der Differentialrechnung zu gewinnen.

E 24

Beispiel E 24:

$$\int_1^2 \sqrt{2x-1} \, dx =$$

Nach der in Abschnitt E 4.1 angegebenen Schrittfolge wird zunächst das unbestimmte Integral

$\int \sqrt{2x-1} \, dx$  ermittelt. Der Integrand ist hier eine **verkettete Funktion** (Definition A 8)

$f(x) = v(u(x))$  mit  $z = u(x) = 2x - 1$  als innere Funktion und  $v(z) = \sqrt{z}$  als äußere Funktion.

Eine Stammfunktion zu  $v(z) = \sqrt{z}$  ist  $F(z) = \frac{2}{3} \sqrt{z}^3$ . Um zu untersuchen, ob nun aber

$F(u(x)) = \frac{2}{3} \sqrt{(2x-1)}^3$  auch eine Stammfunktion von  $f(x) = v(u(x))$  ist, differenzieren wir  $F$  als verkettete Funktion nach der **Kettenregel** (s. Satz D 7):

$$\left[ \frac{2}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} \right]' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (2x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = 2 \cdot \sqrt{2x-1}$$

Bis auf den Faktor 2 erhalten wir die gewünschte Integrandenfunktion. Dividiert man durch diesen Faktor, so ergibt sich

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(2x-1)}^3 \text{ als Stammfunktion, d. h., } \int \sqrt{2x-1} \, dx = \frac{1}{3} \sqrt{(2x-1)}^3 + C.$$

Damit können wir nun auch das angegebene bestimmte Integral berechnen:

$$\int_1^2 \sqrt{2x-1} \, dx = \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(2x-1)}^3 \right]_1^2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{27} - \frac{1}{3} = \sqrt{3} - \frac{1}{3} \approx 1,4$$

Verallgemeinern wir das oben angewandte Vorgehen (beschränkt auf verkettete Funktionen  $v(u(x))$ , bei denen die innere Funktion  $u$  eine lineare Funktion mit  $u(x) = mx + n$  ist), so gelangen wir unter Beachtung der o. g. Regel zur Differentiation verketteter Funktionen (Satz D 7) zu folgendem Satz:

E 12

#### Satz E 12: Integration durch lineare Substitution

Es sei  $f$  eine verkettete Funktion mit  $f(x) = v(u(x))$  und  $z = u(x) = mx + n$  sowie  $F$  eine Stammfunktion der äußeren Funktion  $v$ . Dann gilt

$$\int f(x) \, dx = \int v(mx + n) \, dx = \frac{1}{m} F(mx + n) + C.$$

Durch Differentiation können wir uns sofort von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugen:

$$\text{Es gilt nämlich: } \left[ \frac{1}{m} \cdot F(mx + n) + C \right]' = \frac{1}{m} \cdot F'(mx + n) = \frac{1}{m} v(u(x)) \cdot m = f(x)$$

E 25

Beispiel E 25:

a)  $\int (3x-5)^7 \, dx =$

Bei der Integration von Quadraten oder dritten Potenzen einer linearen Funktion kann sicher zunächst ausmultipliziert und dann gliedweise integriert werden. Bei höheren Potenzen führt der Weg über die **Substitution der linearen Funktion** wesentlich bequemer und schneller zum Ergebnis. Mit der Substitution  $z = 3x - 5$  erhält man hier:

$$\int (3x - 5)^7 dx = \frac{1}{3} \int z^7 dz = \frac{1}{24} z^8 = \frac{1}{24} (3x - 5)^8$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_1^2 \sqrt[3]{(4x+2)^5} dx &= \int_1^2 (4x+2)^{\frac{5}{3}} dx = \left[ \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} (4x+2)^{\frac{8}{3}} \right]_1^2 = \frac{3}{32} \sqrt[3]{10^8} - \frac{3}{32} \sqrt[3]{6^8} \\ &\approx 43,5 - 11,1 = 32,4 \end{aligned}$$

## E 5.2 Integration durch nichtlineare Substitution

Die im Satz E 12 formulierte Regel ist ein Spezialfall der Substitutionsregel, die für beliebig verkettete Funktionen durch Umkehrung der Kettenregel gewonnen werden kann. Wenn im Integranden eines Integrals die verkettete Funktion  $f(x) = v(u(x))$  und außerdem noch als Faktor die Ableitungsfunktion  $u'(x)$  auftritt, dann führt die Substitution  $u(x) = z$  mit  $u'(x) = \frac{dz}{dx}$ , also  $dx = \frac{dz}{u'(x)}$  auf ein einfacheres Integral:  $\int v(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int v(z) dz$ .

Es kann folgender Satz formuliert werden:

Satz E 13:

Es sei  $f(x) = v(u(x)) \cdot u'(x)$  und  $V$  eine Stammfunktion von  $v$ . Dann ist  $F$  mit  $F(x) = V(u(x))$  eine Stammfunktion von  $f$ :

$$\int f(x) dx = \int v(u(x)) \cdot u'(x) dx = V(u(x)) + C = F(x) + C$$

E 13

Von der Richtigkeit dieses Satzes kann man sich durch Differentiation überzeugen.

Beispiel E 26:

$$\int 2x \sqrt{x^2 - 3} dx =$$

Wir **substituieren**  $z = u(x) = x^2 - 3$ . Dann ist  $\frac{dz}{dx} = u'(x) = 2x$  und damit  $dx = \frac{dz}{2x}$ .

Setzt man in das zu berechnende Integral ein, so folgt  $\int \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} \sqrt{z^3} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 - 3)^3} + C$ .

Die Differentiation des erhaltenen Ausdrucks bestätigt die Richtigkeit des Resultats.

E 26

Bei der Berechnung von *bestimmten* Integralen der Form  $\int_a^b v(u(x)) \cdot u'(x) dx$  kann man anstelle der Stammfunktion  $V(u(x))$  auch die Stammfunktion  $V(z)$  mit  $z = u(x)$  verwenden (braucht also nicht wieder „zu re-substituieren“), wenn gleichzeitig die Integrationsgrenzen  $a$  und  $b$  durch  $u(a)$  und  $u(b)$

ersetzt werden. Es gilt:  $\int_a^b v(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} v(z) dz$

Beispiel E 27:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \cdot 2x dx =$$

Wir setzen  $z = u(x) = 2 + x^2$ , woraus  $\frac{dz}{dx} = 2x$  bzw.  $dx = \frac{dz}{2x}$  folgt.

E 27

Für das unbestimmte Integral ergibt sich dann:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \sqrt{z} + C = \sqrt{2+x^2} + C.$$

Zur Ermittlung des bestimmten Integrals kann nun entweder mit der Stammfunktion  $V(z) = \sqrt{z} + C$  oder mit der Stammfunktion  $V(u(x)) = \sqrt{2+x^2} + C$  weitergearbeitet werden. Im ersten Fall sind die Grenzen 0 und 1 wegen  $u(x) = 2+x^2$  durch  $u(0) = 2$  bzw.  $u(1) = 3$  zu ersetzen:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{z}} dz = [\sqrt{z}]_2^3 = \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0,318.$$

Im zweiten Fall rechnet man nach „Re-Substituieren“ mit den Integrationsgrenzen 0 und 1 wie gewohnt weiter:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} dx = [\sqrt{2+x^2}]_0^1 = \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0,318.$$

### E 5.3 Partielle Integration

Während sich die Integration einer Summe von Funktionen relativ einfach gestaltet (s. Satz E 4), ist die Integration eines Produktes von Funktionen nicht so leicht auszuführen.

Um hierfür ein Verfahren zu finden, greifen wir auf die Produktregel der Differentialrechnung zurück und stellen unsere Überlegungen zunächst wieder für unbestimmte Integrale an.

Für die Ableitung eines Produktes  $F(x) = u(x) \cdot v(x)$  von Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$  gilt bekanntlich (s. Satz D 5)  $F'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$ . Durch Integration erhält man daraus

$$\int F'(x) dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx + \int u'(x) \cdot v(x) dx.$$

Da  $\int F'(x) dx = F(x) = u(x) \cdot v(x)$ , folgt

$$u(x) \cdot v(x) = \int u(x) \cdot v'(x) dx + \int u'(x) \cdot v(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx.$$

Somit lässt sich der folgende Satz formulieren:

E 14

#### Satz E 14: Partielle Integration

Sind  $u$  und  $v$  im Intervall  $[a; b]$  differenzierbare Funktionen sowie  $u'$  und  $v'$  im Intervall  $[a; b]$  stetig, so gilt  $\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$ .

Die Anwendung dieses Satzes nennt man „partielle Integration“, um anzudeuten, dass ein *Restintegral* bleibt. Man integriert nur teilweise – also *partiell*. Dieses Restintegral ist entweder bereits ein uns bekanntes Grundintegral oder wir müssen es weiter bearbeiten.

E 28

Beispiel E 28:

$$\int_0^2 x \sqrt{2x+3} dx =$$

Zur Ermittlung des unbestimmten Integrals setzen wir  $u(x) = x$  und  $v'(x) = \sqrt{2x+3}$ . Dann ist  $u'(x) = 1$  und  $v(x) = \frac{1}{3} \cdot (2x+3)^{\frac{3}{2}}$ . Nach Satz E 14 erhält man nun:

$$\int x \sqrt{2x+3} \, dx = \frac{x(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \int \frac{1}{2} (2x+3)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(2x+3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}.$$

Damit ist:

$$\int_0^2 x \sqrt{2x+3} \, dx = \left[ \frac{x(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(2x+3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^2 \approx 4,743.$$

### E 5.4 Integration durch Partialbruchzerlegung

Aus den bisher betrachteten Beispielen wurde deutlich, dass im Gegensatz zum Differenzieren das Integrieren mehr Schwierigkeiten bereitet. Man benötigt hier die Kenntnis einer Vielzahl von Grundintegralen und vor allem vielfältige Erfahrungen.

Für gebrochenrationale Funktionen konnte bisher nur in einigen wenigen, sehr einfachen Fällen das Integral ermittelt oder berechnet werden. Es soll nun ein Verfahren eingeführt werden, das für das Integrieren weiterer derartiger Funktionen von Nutzen ist.

Jede gebrochenrationale Funktion lässt sich in eine Summe einfacher Teilbrüche zerlegen. Der Lösungsansatz für diese Partialbruchzerlegung ist davon abhängig, ob die Funktion im Nenner einfache oder mehrfache, reelle oder komplexe Nullstellen (vgl. Abschnitte A 2.2 und „Komplexe Zahlen“) hat. Es soll hier der Fall betrachtet werden, dass die Nennerfunktion einfache reelle Nullstellen besitzt.

Beispiel E 29:

- a) Es ist das Integral  $\int \frac{5x-17}{x^2-8x+15} \, dx$  zu ermitteln.

Die quadratische Funktion im Nenner kann mithilfe ihrer Nullstellen  $x_1 = 3$  und  $x_2 = 5$  in ein **Produkt aus Linearfaktoren zerlegt** werden (s. Satz A 1):

$x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$  Für die Partialbruchzerlegung wählen wir den Ansatz:

$$\frac{5x-17}{x^2-8x+15} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-5}, \text{ woraus wegen}$$

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-5} = \frac{(A+B)x + (-5A-3B)}{(x-3)(x-5)} \text{ durch Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem}$$

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & 5 \\ -5A - 3B & = & -17 \end{array} \text{ mit den Lösungen } A = 1 \text{ und } B = 4 \text{ folgt.}$$

Also kann man schreiben:

$$\int \frac{5x-17}{x^2-8x+15} \, dx = \int \frac{1}{x-3} \, dx + \int \frac{4}{x-5} \, dx = \ln|x-3| + 4\ln|x-5| + C,$$

denn  $(\ln|x-3|)' = \frac{1}{x-3}$  und  $(4\ln|x-5|)' = \frac{4}{x-5}$  (s. Abschnitte D 3.2 und E 6.2).

- b)  $\int \frac{x^3-5x^2+x+4}{x^2-7x+10} \, dx =$

Eine unecht gebrochenrationale Funktion ist vor der Partialbruchzerlegung in eine ganzrationale Funktion und eine echt gebrochenrationale Funktion zu zerlegen. Das geschieht durch Partialdivision. Also folgt für obigen Quotienten:

$$\frac{x^3-5x^2+x+4}{x^2-7x+10} = x + 2 + \frac{5x-16}{x^2-7x+10}$$

Auf die echt gebrochenrationale Funktion wenden wir das in a) erläuterte Verfahren an:

$$\frac{5x-16}{x^2-7x+10} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-5}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3-5x^2+x+4}{x^2-7x+10} dx &= \int (x+2) dx + \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{3}{x-5} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-2| + 3\ln|x-5| + C \end{aligned}$$

Die im Abschnitt E 5 eingeführten Integrationsmethoden machen deutlich, dass es bei komplexeren Integrandenfunktionen manchmal recht mühsam sein kann, das bestimmte bzw. das unbestimmte Integral zu ermitteln. Der Einsatz eines GTA erleichtert die Arbeit, wie nachfolgend am Beispiele einiger Integrale gezeigt wird (wobei wir in (b) bis (e) noch einmal auf die obigen Beispiele E 26, E 27, E 28 bzw. E 29 zurückgreifen):

E 30

Beispiel E 30:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{9v^4-30v^3+55v^2-44v}{\sqrt{v^2+16}} dv & \quad \text{b) } \int 2x \sqrt{(x^2-3)^3} dx = \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} dx = \\ \text{d) } \int_0^2 x \sqrt{2x+3} dx & \quad \text{e) } \int \frac{5x-17}{x^2-8x+15} dx = \end{aligned}$$

Fig. E 44 (zu a))

Fig. E 45 (zu b), c))

Fig. E 46 (zu d), e))

## E 6 Integration weiterer Funktionen; uneigentliche Integrale

### E 6.1 Integration trigonometrischer Funktionen

Stammfunktionen zu den trigonometrischen Funktionen  $f(x) = \sin x$  und  $g(x) = \cos x$  lassen sich unmittelbar aus den Ableitungsfunktionen dieser Funktionen gewinnen (vgl. Abschnitt D 3.3). Den im Satz D 12 und D 13 formulierten Ergebnissen entnehmen wir:

$F(x) = -\cos x$  ist eine Stammfunktion von  $f(x) = \sin x$ , denn  $D_F = D_f$  und  $F' = f$ , und

$G(x) = \sin x$  ist eine Stammfunktion von  $g(x) = \cos x$ , denn  $D_G = D_g$  und  $G' = g$ .

E 15

#### Satz E 15: Integrale der Sinus- und Kosinusfunktion

Die Sinusfunktion  $f(x) = \sin x$  und die Kosinusfunktion  $g(x) = \cos x$  sind für alle  $x \in \mathbb{R}$  integrierbar. Es gilt:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \text{und} \quad \int \cos x dx = \sin x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Mit den in Satz E 15 genannten Grundintegralen sowie unter Anwendung der Kenntnisse über spezielle Integrationsmethoden (Abschnitt E 5) lassen sich Integrale weiterer Funktionen ermitteln.

Beispiel E 31:

a)  $\int \sin(2x + \frac{\pi}{2}) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x + \frac{\pi}{2}) + C$  (nach Satz E 12)

b)  $\int x \cdot \cos x dx =$

Wir führen hier eine partielle Integration (Satz E 14) durch und setzen dafür

$v'(x) = \cos x$  und  $u(x) = x$ . Daraus folgt:  $v(x) = \sin x$  und  $u'(x) = 1$ .

Also gilt:  $\int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x - (-\cos x) + C = x \cdot \sin x + \cos x + C$

c) Es ist der Inhalt der in Fig. E 47 markierten Fläche zu berechnen.

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$\approx 1,41 - (-1,41) = 2,82$$

Die Fläche hat einen Inhalt von rund 2,8 FE.

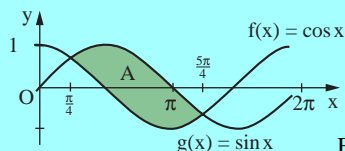


Fig. E 47

d) Der Graph der Funktion  $f(x) = 3 \cos(x^2 - 1)$  sowie die positive x- und y-Achse begrenzen eine Fläche vollständig. Der Inhalt dieser Fläche ist zu berechnen.

Wir zeichnen den Graphen dieser Funktion auf dem GTA-Bildschirm, ermitteln die erste positive Nullstelle und berechnen dann im Grafikmenü mittels **[F5]** **[7]** und Eingabe der Intervallgrenzen den Flächeninhalt der markierten Fläche.

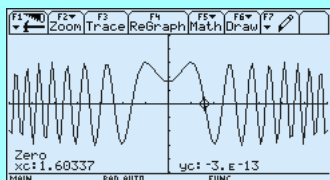


Fig. E 48

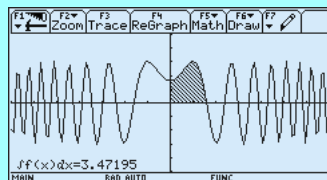


Fig. E 49

Der Flächeneinhalt beträgt rund 3,47 FE.

## E 6.2 Integration von Exponential- und Logarithmusfunktionen

Für die Differentiation der Exponential- und Logarithmusfunktionen gilt

Funktion f	Funktion f'	Funktion f	Funktion f'
$e^x$	$e^x$	$\ln x \quad (x > 0)$	$\frac{1}{x}$
$a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$a^x \cdot \ln a$	$\log_a x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$	$\frac{1}{x \ln a}$

Aus diesen Ableitungsfunktionen ergeben sich unmittelbar folgende Grundintegrale:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{x \ln a} dx = \log_a x + C \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$$

Das Integral  $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$  schließt die Lücke, die bei der Potenzregel (Satz E 3) für den Exponenten  $-1$  gelassen werden musste.

## E 32

Beispiel E 32:

a)  $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$  (Integration durch lineare Substitution, Satz E 12)

b) Der Inhalt der in Fig. E 50 markierten Fläche ist zu berechnen.

$$A = \int_{0,5}^2 \left( \frac{1}{x} - (-x^2) \right) dx = \left[ \ln x + \frac{x^3}{3} \right]_{0,5}^2 \approx 3,36 - (-0,65) = 4,01$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 4 FE.

c) Man berechne mittels eines GTA:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^{\cos x} dx =$

Die Berechnung dieses bestimmten Integrals kann auf verschiedenen Wegen erfolgen. Am schnellsten erhält man eine Lösung, indem man nach (2nd) (7) den Integranden, die Integrationsvariable  $x$  und die Grenzen eingibt (Fig. E 51, Zeilen 1 oder 2). Genauso wäre es aber beispielsweise möglich, die Funktion darzustellen und im Grafikenmenü über (F5) (7) und Eingabe der Intervallgrenzen die Aufgaben zu lösen (Fig. E 52).

Man erhält in beiden Fällen:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^{\cos x} dx \approx 1,718$

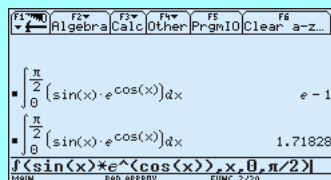


Fig. E 51

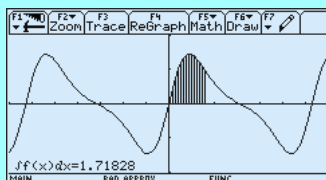


Fig. E 52

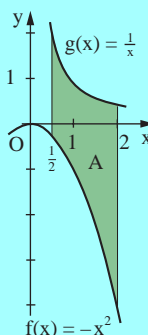


Fig. E 50

### E 6.3 Uneigentliche Integrale

Bei der Definition des Begriffs „bestimmtes Integral“ wurde davon ausgegangen, dass die Integrandenfunktion über dem abgeschlossenen Intervall  $[a; b]$  einen kleinsten bzw. einen größten Funktionswert besitzt (Definition E 3). Das heißt, das bestimmte Integral kann nach dieser Definition nur gebildet werden, wenn

- der Integrationsbereich (das Integrationsintervall)  $[a; b]$  endlich und
- der Integrand  $f(x)$  in diesem Intervall  $[a; b]$  beschränkt ist.

Bei den bisher betrachteten Funktionen war das der Fall. Ist jedoch eine der beiden Voraussetzungen oder sind beide zugleich nicht erfüllt, gelangt man zum sogenannten *uneigentlichen Integral*.

Dabei lässt sich unterscheiden zwischen

- (1) dem uneigentlichen Integral mit unbeschränktem Integrationsintervall und
- (2) dem uneigentlichen Integral mit unbeschränktem Integranden.

Beide Fälle können auch gemeinsam auftreten.

(1) *Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall*

Wird das beschränkte Integrationsintervall „geöffnet“, entstehen die Integrale

$$\int_a^\infty f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx, \quad \text{wobei } f \text{ eine stetige Funktion sei.}$$

Die Definition dieser Integrale erfolgt über die entsprechenden Grenzwerte.

Definition E 8:

Ist  $f(x)$  eine in jedem Intervall  $[a; b]$  ( $b < \infty$ ) stückweise stetige Funktion und existiert der

Grenzwert  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$ , so bezeichnet man diesen Grenzwert als **uneigentliches Integral**

von  $f(x)$  im Intervall  $[a; \infty[$ . Man schreibt:  $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$ .

E 8

Analog kann man mit den anderen beiden Integralen verfahren. Mit dieser Definition ist auch die Berechnung von uneigentlichen Integralen vorgegeben: Zunächst wird das Integral  $\int_a^b f(x)dx$  für einen endlichen Bereich  $[a; b]$  berechnet. Anschließend bildet man den Grenzwert für  $b \rightarrow \infty$ . Existiert dieser Grenzwert, so ist er der Wert des uneigentlichen Integrals.

Beispiel E 33:

Man berechne das **uneigentliche Integral**  $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ .

Es ist

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{2}{\sqrt{b}} + 2 \right) = -0 + 2 = 2. \end{aligned}$$

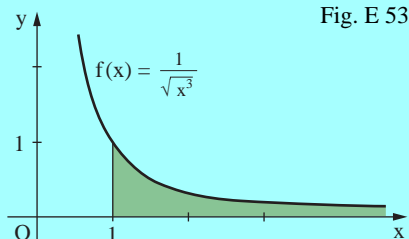


Fig. E 53

E 33

### (2) Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integranden

Liegen im Integrationsintervall  $[a; b]$  Unstetigkeitsstellen, an denen die Funktion  $f$  nicht definiert ist, so kann hier ebenfalls untersucht werden, ob sich das Integral einem Grenzwert nähert, wenn sich die Integrationsgrenzen der Polstelle nähern. Diese Grenzwerte werden dann auch hier zur Definition dieser uneigentlichen Integrale verwendet.

Definition E 9:

Ist die Funktion  $f(x)$  außer an der Polstelle  $x = c$  in den Teilintervallen  $[a; c - \varepsilon]$  sowie  $[c + \delta; b]$  stückweise stetig und existieren die Grenzwerte

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \quad \text{und} \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx,$$

so bezeichnet man die Summe dieser Grenzwerte als **uneigentliches Integral** von  $f(x)$ .

Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx.$$

E 9

E 34

Beispiel E 34:

Man berechne das **uneigentliche Integral**  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$  (Fig. E 54).

Der Integrand ist bei  $x = 1$  nicht definiert. Da die Polstelle mit der oberen Integrationsgrenze zusammenfällt, gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [-2\sqrt{1-x}]_0^{1-\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (-2\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{1}) = 2. \end{aligned}$$

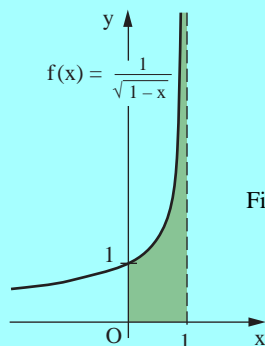


Fig. E 54

Auch beim Berechnen uneigentlicher Integrale kann der GTA eine wertvolle Hilfe sein. Für das obige Beispiel geben die Fig. E 55 und E 56 zwei Lösungswege an. Dabei wurde in Fig. E 56 als obere Grenze 0.999999 eingegeben.

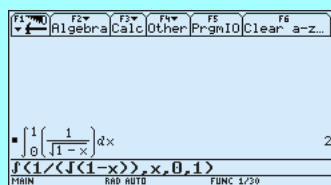


Fig. E 55

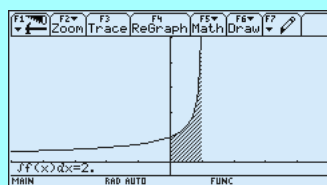


Fig. E 56

## E 6.4 Beispiele für nicht elementar integrierbare Funktionen

Beim Differenzieren von elementaren Funktionen entstehen wieder elementare Funktionen. Es gibt hingegen eine große Anzahl von elementaren Funktionen, deren unbestimmte Integrale sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lassen. Auch solche breit anwendbare Regeln wie etwa die Produkt- oder die Quotientenregel der Differentialrechnung haben wir in der Integralrechnung nicht kennen gelernt. Scheinbar geringfügige Veränderungen in den Funktionen führen hier zu völlig anderen Lösungswegen oder zu nicht mehr elementar integrierbaren Funktionen. Typische Beispiele sind die beiden Funktionen  $f(x) = x \sin x$  und  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Die Funktion  $f$  lässt sich nach der Methode der partiellen Integration integrieren (s. E 5.3):

Wir setzen z. B.  $u(x) = x$  und  $v'(x) = \sin x$  und erhalten damit  $\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$ . Das Integral der Funktion  $g$  hingegen ist mit elementaren Hilfsmitteln nicht berechenbar.

Funktionen, deren Integrale sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken lassen, werden *nicht geschlossen integrierbar* genannt. Für solche Funktionen können bestimmte Integrale dann nur mit Hilfe von Näherungsverfahren ermittelt werden.

Als weitere Beispiele für nicht elementar integrierbare Funktionen wären zu nennen:

$$f(x) = e^{-x^2} \quad g(x) = \frac{e^x}{x} \quad h(x) = \sqrt{1+x^4}$$

Wie nebenstehendes Schirmbild zeigt, bieten auch GTA in vielen solchen Fälle keine Lösung an.

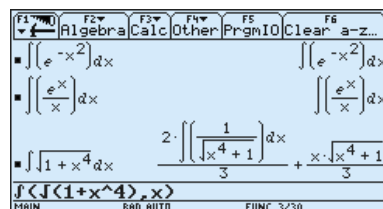


Fig. E 57